

**ЭГЕМБЕРДИЕВ Ж.**

**СТАТИСТИКАЛЫК  
ФИЗИКАГА  
КИРИШҮҮ**

**2-бөлүк**

Ош – 2007

КЫРГЫЗ РЕСПУБЛИКАСЫНЫН  
БИЛИМ БЕРҮҮ ЖАНА ИЛИМ МИНИСТРЛИГИ

**Ош мамлекеттик университети**

**Эгембердиев Ж.**

**СТАТИСТИКАЛЫК  
ФИЗИКАГА  
КИРИШҮҮ**

**2-бөлүк**

Окуу куралы

Ош – 2007

УДК 531  
ББК 22.317  
Э 17

Ош мамлекеттик университетинин Окумуштуулар Кеңешинин чечими менен басмага сунушталган

Р е ц е н з е н т – физика-математика илимдеринин доктору, профессор  
Ташполотов Ы.

**Эгембердиев Ж.**

Э 17     Статистикалык физикага киришүү. 2-бөлүк: Окуу куралы.  
- Ош: ОшМУ, «Билим», 2007. -160 б.

**ISBN 978-9967-03-405-1**

Бул китеп - «Статистикалык физикага киришүү» (Ош-2005) аттуу окуу куралынын уландысы. Мында тең салмаксыз абалдардын жана процесстердин теориясынын элементтери, статистикалык физика жана термодинамика боюнча маселелер жана алардын чыгарылыштары келтирилген.

Окуу куралы университеттердин «физика», «физика жана информатика», «электроника жана микроэлектроника» адистиктеринин жогорку курстарынын студенттерине, аспирант-изденүүчүлөргө жана окутуучуларга сунуш кылынат.

Э 1604000000-07  
ISBN 978-9967-03-405-1

УДК 531  
ББК 22.317  
© ОшМУ, 2007  
© Ж.Эгембердиев, 2007

# МАЗМУНУ

## ТЕҢ САЛМАКСЫЗ СИСТЕМАЛАРДЫН ЖАНА ПРОЦЕССТЕРДИН ТЕОРИЯСЫНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

Киришүү.....	5
<b>VIII ГЛАВА. ТЕҢ САЛМАКСЫЗ ТЕРМОДИНАМИКАГА КИРИШҮҮ.....</b>	<b>8</b>
8.1. Локалдык тең салмактуулук жана тең салмаксыз процесстердин термодинамикасынын негизги теңдемеси.....	8
8.2. Баланстын теңдемелери жана түрдүү чоңдуктардын сакталуу закондору.....	10
8.3. Кайрылбас процесстердин сызыктуу термодинамикасы.....	14
8.3.1. Сызыктуу закон. Кайчылаш кубулуштардын өз ара байланышы.....	14
8.3.2. Тең салмаксыз системанын абалынын стационардуулугунун шарты.....	16
8.3.3. Тең салмаксыз процесстердин сызыктуу термодинамикасынын айрым колдонулуштары.....	18
8.4. Тең салмактуулуктан алыс абалдар. Сызыктуу эмес тең салмаксыз термодинамиканын негиздери.....	20
<b>IX ГЛАВА. ФИЗИКАЛЫК КИНЕТИКАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ. КИНЕТИКАЛЫК ТЕҢДЕМЕЛЕР.....</b>	<b>26</b>
9.1. Смолуховскийдин теңдемеси. Деталдык тең салмактуулук принциби.....	26
9.2. Фоккер-Планктын теңдемеси. Броун кыймылы.....	31
9.3. Больцмандын кинетикалык теңдемеси.....	36
9.4. Боголюбовдун теңдемелери.....	41
9.5. Тең салмаксыз системанын эволюциясы .....	46
9.6. Боголюбовдун теңдемелеринин чен бирдиксиз формасы. Факторлоштуруу жана корреляциялык функциялар.....	49
9.7. Өз ара жуурулушкан талаа жакындаштыруусу жана Власовдун кинетикалык теңдемеси.....	51
9.8. Больцмандын кинетикалык теңдемесин чечүүнүн жакындаштырылган методдору.....	54
9.9. Н-теорема жана Максвелл-Больцмандын бөлүштүрүүсү.....	56

СТАТИСТИКАЛЫК ФИЗИКА ЖАНА ТЕРМОДИНАМИКА БОЮНЧА МАСЕЛЕЛЕР.....	64
1. Статистикалык физиканын негизги түшүнүктөрү жана принциптери.....	65
2. Ыктымалдыктар теориясынын элементтери жана анын айрым колдонулуштары.....	65
3. Термодинамиканын негиздери. Термодинамикалык функциялар.....	67
4. Статистикалык физиканын газдардын касиеттерин окуп үйрөнүүгө колдонулуштары.....	71
Максвелл-Больцмандын бөлүштүрүүсү.....	71
Гиббстин бөлүштүрүүлөрү. Идеалдуу газдын статистикасы.	73
5. Реалдуу газдар.....	74
6. Катуу заттар. Жылуулук сыйымдуулук.....	75
7. Бөлүкчөлөрүнүн саны өзгөрүлмө системалар. Фазалык өтүүлөр.....	76
8. Кванттык статистика. Ферми-Дирактын жана Бозе-Эйнштейндин бөлүштүрүүлөрү.....	77
9. Флуктуациялар теориясы.....	80
10. Тең салмаксыз процесстердин теориясынын айрым маселелери.....	82
 МАСЕЛЕЛЕРДИН ЖООПТОРУ ЖАНА ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ.....	 83
 ТИРКЕМЕЛЕР.....	 149
1. Негизги физикалык турактуулар.....	149
2. Дирактын дельта-функциясы.....	149
3. Эйлердин гамма-функциясы.....	150
4. Айрым интегралдарды эсептөө.....	150
5. Кванттык статистиканын формулаларында кездешүүчү интегралдар.....	153
6. Каталардын интегралы.....	155
7. Стирлингдин формуласы.....	157
8. $e^x$ жана $e^{-x}$ функцияларынын маанилери.....	157
 АДАБИЯТТАР.....	 159

# ТЕҢ САЛМАКСЫЗ СИСТЕМАЛАРДЫН ЖАНА ПРОЦЕССТЕРДИН ТЕОРИЯСЫНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ

## Киришүү

Кайрылбас процесстердин татаалдыгы жана көп түрдүүлүгү аларды окуп үйрөнүүдө бир топ кыйынчылыктарды жаратат. Бул кубулуштардын толук бирдиктүү теориясы али түзүлүп бүтө элек. Бирок көптөгөн окумуштуулардын аракети менен тең салмаксыз абалдарды изилдөөнүн бир катар методдору иштелип чыккан жана бул методдордун жардамында өтө чоң теориялык жана практикалык мааниге ээ болгон натыйжалар алынууда.

Тең салмактуу абалдагы системаларды изилдегендей эле бул учурда да маселени чечүүгө эки түрдүү -- *макроскопиялык* жана *микроскопиялык* мамиленин болушу мүмкүн. Биринчи учурда маселе тең салмаксыз системанын абалынын макроскопиялык параметрлеринин ортосундагы байланышты тажрыйбалык маалыматтардын негизинде, молекулалык-кинетикалык көз караштарга таянбастан, аныктоого келтирилет.

Тең салмактуу абалдардын термодинамикасынан айырмаланып тең салмаксыз системалардын мүнөздөмөлөрү убакыттын өтүшү менен өзгөрүп барат, ал эми интенсивдүү параметрлер (тыгыздык, температура, ж.б.) системанын түрдүү бөлүктөрүндө түрдүүчө мааниге ээ, б.а. координатадан көз каранды болушат. Кайрылбас (тең салмаксыз) кубулуштардын теориясында негизги ролду түрдүү физикалык чоңдуктардын - энергиянын, массанын же бөлүкчөлөрдүн санынын, жылуулуктун, импульстун, энтропиянын, электр зарядынын ж.б. *агымдары* ойношот. Системанын тең салмактуу абалында эч кандай агым кездешпей тургандыгын жакшы билебиз.

Агымдардын пайда болуу себептери формалдуу түрдө *күчтөр* деген атка ээ болушкан. Күчтөргө интенсивдүү параметрлердин градиенттери же алар менен байланышкан чоңдуктар мисал болушу мүмкүн. Адатта, тең салмактуу абалынан анчалык узак алыстабаган системаларда, агымдар жана күчтөр өз ара сызыктуу туюнтмалар аркылуу байланышат деп кабыл алышат. Бул туюнтмалардагы пропорциялаштык коэффициенттери *кинетикалык коэффициенттер* деп аталышат. Жалпы учурда алар системанын абалынын термодинамикалык параметрлеринен көз каранды болушат.

Тең салмаксыз процесстерди изилдөөнүн микроскопиялык жолу статистикалык физиканын идеяларын жалпылоого жана андан ары өнүктүрүүгө негизделген. Көпчүлүк учурда төмөнкүдөй ыкманы пайдаланышат. Бөлүкчөлөрдүн түрдүү абалдары үчүн ыктымалдыктардын, тең салмактуу системалардын абалдары боюнча бөлүштүрүлүшүнөн айырмаланган, бөлүштүрүлүү функциясын киргизишет. Бул бөлүштүрүүлөр, эреже катары, координатадан, ал эми стационардуу эмес учурларда - убакыттан да көз каранды болушат.

Кайрылбас кубулуштардын статистикалык теориясы *физикалык кинетика* деп аталат. Кинетиканын эң алгачкы маселеси болуп статистикалык бөлүштүрүү функциясын жана анын убакыт боюнча өзгөрүшүн аныктоочу теңдемесин табуу эсептелет. Эгерде бул маселе оң чечилген болсо, тең салмактуулук учурундагыдай эле, бөлүкчөлөрдүн абалдары боюнча бөлүштүрүлүш закону боюнча системанын термодинамикалык мүнөздөмөлөрүн эсептөөгө, алардын ортосундагы байланышты тургузууга, бардык чоңдуктардын өзгөрүү закон ченемдүүлүгүн көрсөтүүгө болот. Тилекке каршы, бул маселе бардык эле учурда чечиле бербейт. Анткени бөлүкчөлөрдүн абалдары боюнча бөлүштүрүлүшү үчүн, тең салмактуу абалдардагы сыяктуу бардык жерде жана бардык учурларда колдонууга жарактуу, кандайдыр-бир жөнөкөй функцияларды киргизүү мүмкүн эмес. Ошондуктан, бүгүнкү күнгө карата көптөгөн жекече маселелерди чечүүгө ийгиликтүү колдонулган ыкмалар иштелип чыккан. Негизинде ар кандай татаал проблеманы изилдөөгө жарактуу жалпы методдор да сунушталган, бирок аларды практикада колдонуу али чечилбеген математикалык кыйынчылыктарга учуроодо.

Кинетиканын жана тең салмаксыз термодинамиканын конкреттүү маселелеринин тизмеги өтө кеңири. Аларга, биринчиден, *релаксациянын*, б.а. берилген баштапкы тең салмаксыз абалдан тең салмактуу абалга өтүүнүн проблемалары, экинчиден, микроскопиялык системалардын *тез өзгөрүүчү*, мүнөздүү өзгөрүү убактысы системанын параметрлеринин релаксация убактыларына салыштырганда кыска болгон талаалардагы тартиби жөнүндөгү маселелер, үчүнчүдөн, тең салмаксыз, бирок системанын параметрлеринин градиенттери нерсеге жылуулук, зат, заряд ж.б. берүүнүн эсебинен турактуу кармалып турган кездеги *стационардуу* процесстер кирет. Мындай процесстерге *ташуу* кубулуштары - диффузия, жылуулук өткөрүмдүүлүк, илешимдүүлүк, электр өткөрүмдүүлүгү мисал боло алат.

Кинетикада жана тең салмаксыз термодинамикада жакынкы убактарга чейин негизинен бир аз гана тең салмаксыз (слабо

неравновесное) абалдар каралып келген. Бирок акыркы жылдары чөйрө менен зат жана энергия алмашып туруучу ачык системалардагы өтө тең салмаксыз абалдардын термодинамикасы – тирүү организмдердин термодинамикасы тез өнүгө баштады.

Тең салмаксыз кубулуштарды изилдөөнүн кинетикалык методу терең мааниге ээ болуу менен тең салмаксыз термодинамиканын формалдуу методдорун негиздей алышы зарыл.

*Окурмандын эсине:* Бул окуу куралы автордун ОшПИ-ОшМУнун физика адистигинин студенттерине окуган лекцияларынын негизинде даярдалды жана кыргыз тилинде алгачкы жолу 2005-жылы жарык көргөн «Статистикалык физикага киришүү» аттуу окуу колдонмосунун 2-бөлүгү болуп эсептелет. Китепке тең салмаксыз абалдарды жана процесстерди окуп үйрөнүүнүн термодинамикалык жана статистикалык методдору тууралуу кыскача маалыматтар, статистикалык физика жана термодинамика боюнча маселелер жана алардын чыгарылыштары, керектүү маалыматтарды өз ичине камтыган тиркеме киргизилди. Окуу материалдарынын өзөгүн «теориялык физика» боюнча окуу программасынын чегинде И.П.Базаровдун «Термодинамикасы»(М.: «Высшая школа»,1991), Ю.Б.Румер, М.Ш.Рывкиндин «Термодинамика, статистическая физика и кинетика»(М.: «Наука», 1977), В.М.Варикаш, А.И.Болсун жана В.В.Аксеновдун «Сборник задач по статистической физике»(Минск,«Высшая школа»,1979; М.:2004) аттуу китептериндеги тиешелүү маалыматтар түздү, тизмеси китептин аягында берилген электрондук окуу китептери да пайдаланылды.

Кол жазманы компьютерге терип, басмага даярдоодо көрсөткөн жардамы үчүн Ж.Абдылдаевага, аны окуп чыгып, баалуу сын-пикирин, сунуштарын билдиргендиги үчүн кесиптешим ф.-м.и.д., профессор Ы.Ташполотовко терең ыраазычылыгымды билдиремин.

Окуу куралы кыргыз тилинде алгачкы жолу даярдалып жаткандыктан, анын сапатын жогорулатуу боюнча окурмандардын сын-пикирлерин, кеңештерин күтөбүз.



## VIII ГЛАВА

# ТЕҢ САЛМАКСЫЗ ТЕРМОДИНАМИКАГА КИРИШҮҮ

Тең салмаксыз термодинамика - теориялык физиканын салыштырмалуу жаш жана тез өнүгүп бара жаткан бөлүгү. Ал классикалык термодинамиканы системанын тең салмактуу абалынан бир аз гана четтеген абалдарына жалпылоонун негизинде пайда болгон жана андан ары өтө тең салмаксыз системалардагы процесстердин теориясын түзүү үчүн колдонула баштады.

Тең салмаксыз термодинамиканын баштапкы жоболорун карап көрөлү.

### **8.1. Локалдык тең салмактуулук жана тең салмаксыз процесстердин термодинамикасынын негизги теңдемеси**

Термодинамикалык тең салмактуу системалардын бардык бөлүгүндө температура жана химиялык потенциал турактуу болору белгилүү:

$$\text{grad}T=0, \quad \text{grad}\mu=0.$$

Эгерде бул шарттар аткарылбаса ( $\text{grad}T \neq 0$ ,  $\text{grad}\mu \neq 0$ ), анда системада масса, энергия, электр заряды ж.б. ташылган кайрылбас процесстер жүрө баштайт.

Классикалык термодинамиканын тең салмаксыз процесстерге жалпыланышы, биринчи кезекте, *локалдык* (жергиликтүү, системанын чектүү бөлүгүндөгү) *тең салмактуулук* түшүнүгүнө негизделет.

Тең салмактуу системалардын термодинамикасында абалдын параметрлери ар дайым бүтүндөй жалпы системаны мүнөздөшөрү белгилүү. Тең салмаксыз системаларда бардык чоңдуктарды анын ар бир айрым участкаларына тиешелүү деп кароого, б.а. аларды локалдык (жергиликтүү) макроскопиялык мүнөздөмөлөр катары эсептөөгө туура келет.

Релаксация убактысы системанын өлчөмдөрүнүн чоңоюшу менен өсөрү белгилүү. Демек, анын айрым майда бөлүктөрү өз алдынча, бул майда бөлүктөрдүн ортосунда өз ара тең салмактуулук орногонго караганда бир кыйла эрте, тең салмактуу абалына келишет. Мына ошондуктан, системада жалпы тең салмактуулук али орной элек болсо да, тең салмаксыз термодинамикада системанын анчалык чоң эмес макроскопиялык бөлүктөрүндөгү локалдык тең салмактуулук жөнүндө сөз кылып, алардын термодинамикалык параметрлери убакыттын өтүшү

менен жана бир чекиттен башкасына өткөндө жай өзгөрүп барат деп эсептешет.

Термодинамикада тең салмаксыз системанын бул физикалык кичине, тең салмактуу бөлүктөрүнүн өлчөмдөрү жана алардагы термодинамикалык параметрлердин өзгөрүү убактылары тажрыйбадан аныкталат. Адатта,  $l^3$  физикалык элементардык көлөмү, бир тараптан, өтө көп сандагы бөлүкчөлөрдү камтыйт ( $\vartheta_0 \ll l^3$ ,  $\vartheta_0$  - бир бөлүкчөгө тиешелүү көлөм), экинчиден,  $a_i(\vec{r})$  макроскопиялык параметрлеринин  $l$  узундугундагы өзгөрүүлөрү бул параметрлердин маанилеринен бир кыйла кичине ( $|\partial a_i / \partial x| l \ll a_i$ ), б.а.

$$\vartheta_0^{1/3} \ll l \ll \left| \frac{1}{a_i} \frac{\partial a_i}{\partial x} \right|^{-1}. \quad 8.1.1.$$

Физикалык кичине, тең салмактуу бөлүктөрдөгү термодинамикалык параметрлердин өзгөрүү убактысы  $\tau$  алардын релаксация убактылары  $\tau_i$  ден бир кыйла чоң жана жалпы системадагы тең салмактуулуктун орточо убактысы  $\tau_L$  ден бир кыйла кичине:

$$\tau_i \ll \tau \ll \tau_L \quad 8.1.2.$$

Локалдык тең салмактуулук жөнүндөгү көз караштарды колдонууга мүмкүн болгон (8.1.1), (8.1.2) шарттары аткарылган учурларда кайрылбас процесстердин ырааттуу феноменологиялык термодинамикасын түзүүгө болот. Бул учурларда тең салмаксыз системанын касиеттери мейкиндиктик координаттардан жана убакыттан термодинамиканын теңдемелерине баш ийүүчү мүнөздүк термодинамикалык параметрлер аркылуу гана көз каранды болушкан *локалдык термодинамикалык потенциалдардын* жардамында аныкталышат. Мисалы, эгерде мүнөздүк өзгөрүлмөлөр катары ички энергиянын локалдык тыгыздыгы  $u(\vec{r}, t)$ , салыштырма көлөм  $\vartheta(\vec{r}, t)$  ( $\vartheta = \rho^{-1}$ ,  $\rho$  - чөйрөнүн массасынын локалдык тыгыздыгы) жана түрдүү компоненттердин локалдык концентрациялары  $c_i(\vec{r}, t)$  тандалып алынса, анда  $\vec{r}$  чекитинин чекебелиндеги физикалык элементардык көлөмдүн убакыттын  $t$  моментиндеги абалы Гиббстин

$$Tds = du + pd\vartheta - \sum_i \mu_i dc_i \quad 8.1.3.$$

теңдемесинен аныкталуучу  $s = s \left[ u(\vec{r}, t), \vartheta(\vec{r}, t), c_1(\vec{r}, t), \dots, c_n(\vec{r}, t) \right]$  локалдык энтропиянын жардамында сүрөттөлөт.

Массасы боюнча салыштырма локалдык чоңдуктар үчүн термодинамиканын биринчи жана экинчи башталыштарын

бириктирүүчү (8.1.3)-теңдеме *тең салмаксыз термодинамиканын негизги теңдемеси* болуп эсептелет.

Бирдик массанын ( $s$ ) же бирдик көлөмдүн локалдык энтропиясы ( $\rho s$ ), толук тең салмактуулук учурундагыдай эле,  $a_i(\vec{r}, t)$  термодинамикалык параметрлеринен көз каранды болгондуктан, адиабаттык системадагы кайрылбас процессте бирдик көлөмдөгү энтропиянын пайда болуу ылдамдыгы (*энтропиянын өндүрүлүшү*)

$$\sigma = \frac{d(\rho s)}{dt} = \sum_i \frac{\partial(\rho s)}{\partial a_i} \frac{da_i}{dt}. \quad 8.1.4.$$

$a_i$  локалдык макроскопиялык параметрлери адиабаттык шарттарда өзгөргөндө энтропиянын көбөйүшүн кайрылбас процесстердин “себеби” катары карап  $\frac{\partial(\rho s)}{\partial a_i} \equiv X_i$  чоңдуктарын *термодинамикалык күчтөр*, ал эми  $a_i$  параметрлеринин өзгөрүү тездигин аныктоочу  $\frac{da_i}{dt} \equiv I_i$  чоңдуктарын – *термодинамикалык агымдар* деп аташат. Анда энтропиянын өндүрүлүшү үчүн (8.1.4)-туюнтманы

$$\sigma = \sum_i I_i X_i \quad 8.1.5.$$

көрүнүшүндө жазууга болот.

Жалпы тең салмаксыз системанын энтропиясы анын айрым бөлүктөрүнүн энтропияларынын аддитивдүү суммасы катары аныкталат:

$$S = \int_V \rho s dV \quad 8.1.6.$$

## 8.2. Баланстын теңдемелери жана түрдүү чоңдуктардын сакталуу закондору

Тең салмаксыз системанын термодинамикасынын (8.1.3) негизги теңдемесинин жардамында энтропиянын өндүрүлүшүн жана анын бардык башка термодинамикалык функцияларынын убакыттын өтүшү менен өзгөрүшүн аныктоо үчүн бул теңдемеге бир катар чоңдуктардын (массанын, ички энергиянын ж.б.) балансынын теңдемелерин жана ошондой эле, бул чоңдуктардын агымдарын ( $I_i$ ) термодинамикалык күчтөр ( $X_i$ ) менен байланыштыруучу теңдемелерди кошуп кароо зарыл. Түрдүү чоңдуктардын сакталуу закондорун жана балансынын теңдемелерин табалы.

Макроскопиялык системанын ар кандай экстенсивдүү  $\vec{B}(x, y, z, t)$  чоңдугу баланстын

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\text{div} I_{B,n} + \sigma_B \quad 8.2.1.$$

теңдемесине баш ийет, мында  $I_{B,n} - B = \rho b$  чоңдугунун толук агымынын тыгыздыгы ( $\rho$  – заттын тыгыздыгы,  $b$  –  $B$  чоңдугунун бирдик массага таандык мааниси)  $\sigma_B$  –  $B$  нын, анын булактарынын эсебинен, бирдик көлөмдөгү жана бирдик убакыттын ичиндеги өзгөрүүсү.

$\sigma_B = 0$  болгон учурда (8.2.1)-теңдеме  $B$  чоңдугунун сакталуу законун туюнтат. Алсак, мисалы, массанын сакталуу закону үзгүлтүксүздүктүн гидродинамикалык теңдемесинин көрүнүшүнө ээ:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div} \rho \vec{u}, \quad 8.2.3.$$

мында  $\vec{u}$  – убакыттын  $t$  моментинде мейкиндиктин берилген  $x, y, z$  чекитиндеги массанын өзгөрүү ылдамдыгы.

Толук агымдын тыгыздыгы  $I_{B,n}$ , жалпы учурда,  $B \vec{u}$  конвективдүү агымдан, б.а. заттын агымы менен кошо  $B$  чоңдугунун ташылышынан сырткары, башка табияттагы (жылуулук агымы, диффузиялык агым ж.б.) мүчөлөрдү да камтыйт:

$$I_{B,n} = B \vec{u} + I_B, \quad 8.2.4.$$

мында  $I_B$  – агымдын конвективдүү эмес бөлүгү.

Мына ошентип, аддитивдүү чоңдуктун балансынын (8.2.1)-теңдемесин

$$\frac{\partial(\rho b)}{\partial t} = -\text{div}(\rho b \vec{u} + I_B) + \sigma_B \quad 8.2.5.$$

көрүнүшүндө жазууга болот, мында  $\frac{\partial(\rho b)}{\partial t} - B = \rho b$  чоңдугунун мейкиндиктин берилген кыймылсыз чекитиндеги өзгөрүшүн аныктайт. Бул туундуну заттын туташ чөйрө сыяктуу мейкиндикте жылып бараткан “бөлүкчөсүнө” тиешелүү  $B$  чоңдугунун толук туундусу аркылуу туюнтуп алууга болот. Ал үчүн заттын бөлүкчөсүнүн  $B$  чоңдугунун өзгөрүшү  $dB$  эки түзүүчүдөн:  $B$  нын мейкиндиктин берилген чекитиндеги өзгөрүүсүнөн жана анын заттын берилген бөлүкчөсү жылып,  $dt$  убактысы ичинде  $d\vec{r}$  аралыгына алыстаган чекитке өткөндөгү өзгөрүүсүнөн турарын белгилей кетели. Бул өзгөрүүлөрдүн биринчиси  $\frac{\partial B}{\partial t} dt$  га, ал эми экинчиси

$$dx \frac{\partial B}{\partial x} + dy \frac{\partial B}{\partial y} + dz \frac{\partial B}{\partial z} = \left( d\vec{r}, \nabla \right) B \quad \text{га барабар.}$$

Демек

$$\frac{dB}{dt} = \frac{\partial B}{\partial t} + \left( \vec{u}, \nabla \right) B. \quad 8.2.6.$$

Ошондуктан (8.2.3)- массанын сакталуу законун жана  $B$  чоңдугунун балансынын (8.2.5)-теңдемесин тиешелүү түрдө

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \operatorname{div} \vec{u}, \quad 8.2.7.$$

$$\rho \frac{db}{dt} = -\operatorname{div} \vec{I}_B + \sigma_B \quad 8.2.8.$$

көрүнүшүндө жазууга болот.

(8.2.8) - жалпы формулага ылайык энтропиянын балансынын теңдемеси

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\operatorname{div} \vec{I}_s + \sigma, \quad 8.2.9.$$

мында  $I_s$ -энтропиянын агымынын тыгыздыгы,  $\sigma$  - энтропиянын пайда болушунун локалдык ылдамдыгы (*энтропиянын өндүрүлүшү*).

$I_s$  жана  $\sigma$  лардын айкын көрүнүшүн табуу үчүн (8.2.9)-формулану Гиббстин (8.1.3)-теңдемесинен табылуучу  $\rho \frac{ds}{dt}$  нын

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\rho}{T} \frac{du}{dt} + \frac{\rho p}{T} \frac{d\vartheta}{dt} - \sum_i \frac{\rho \mu_i}{T} \frac{dc_i}{dt} \quad 8.2.10.$$

туюнтмасына салыштырышат, убакыт боюнча туундулардын жана энтропиянын өндүрүлүшүнүн (8.1.5) туюнтмасын эсепке алышат.

Мисал катары температуралык градиенти түзүлгөн бир тектүү катуу телодогу энтропиянын балансынын теңдемесин жана  $\vec{I}_s$ ,  $\sigma$  нын айкын көрүнүшүн табалы.

$u(x, y, z, t)$ - салыштырма ички энергия болсун. Нерсенин көлөмүнүн жылуулуктан кеңейүүнүн натыйжасындагы өзгөрүшүн эсепке албайбыз. Катуу затта бөлүкчөлөрдүн агымы да болушу мүмкүн эмес. Ошондуктан (8.2.10)-теңдемеден

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{T} \frac{du}{dt} = \frac{C_v}{T} \frac{dT}{dt}.$$

Энергиянын сакталуу закону боюнча ( $\sigma_B = 0$  кезинде (8.2.8)- жалпы формулага ылайык)

$$\rho \frac{du}{dt} = -\operatorname{div} \vec{I}_Q,$$

мында  $\vec{I}_Q$ - жылуулук агымынын тыгыздыгы. Бул теңдемелерден энтропиянын балансы үчүн

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{I}_Q \quad 8.2.11.$$

туюнтмасына ээ болобуз жана,

$$\operatorname{div} \frac{\vec{I}_Q}{T} = \frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{I}_Q + \left( \vec{I}_Q, \nabla \frac{1}{T} \right) = \frac{1}{T} \operatorname{div} \vec{I}_Q - \frac{1}{T^2} \left( \vec{I}_Q, \nabla T \right)$$

болгондуктан

$$\rho \frac{ds}{dt} = -\operatorname{div} \frac{\vec{I}_Q}{T} - \frac{1}{T^2} \left( \vec{I}_Q, \nabla T \right). \quad 8.2.12.$$

(8.2.12)-теңдемени энтропиянын балансынын (8.2.9)-гидродинамикалык теңдемесине салыштырып, энтропиянын агымынын тыгыздыгы  $\left( \vec{I}_s \right)$  жана энтропиянын өндүрүлүшү  $(\sigma)$  тиешелүү түрдө

$$\vec{I}_s = \frac{1}{T} \vec{I}_Q, \quad 8.2.13.$$

$$\sigma = \left( \vec{I}_Q, -\frac{1}{T^2} \nabla T \right) = \sum_{i=1}^3 I_i X_i \quad 8.2.14.$$

болорун көрөбүз, мында  $X_i = -\frac{1}{T^2} \frac{\partial T}{\partial x_i} - I_i$  агымынын декарттык координатасына туура келген термодинамикалык күчтүн декарттык компонентасы.

Тажрыйбалардын негизинде аныкталган агымдар менен термодинамикалык күчтөрдүн ортосундагы катнаштарды кошумча пайдалануу менен, термодинамиканын экинчи башталышына ылайык,  $\sigma \geq 0$  экендигин көрсөтүүгө болот. Чындыгында эле, мисалы,  $\vec{I}_Q$  нун температуранын градиентине пропорциялаштыгы жөнүндөгү Фурьенин

$$\vec{I}_Q = -\chi \nabla T \quad (\chi > 0), \quad 8.2.15.$$

жылуулулук өткөрүмдүүлүк законун пайдаланып (8.2.14)-туюнтмадан

$$\sigma = \frac{\chi}{T^2} (\nabla T)^2 \quad 8.2.16.$$

болорун көрөбүз.

(8.2.11)-теңдеменин оң тарабын (8.2.12)-дегидей энтропиянын агымына жана булагына ажыратып жазуу математикалык жактан так болбостугун белгилей кетели.  $\sigma \geq 0$  физикалык шартын жана (8.2.14)-туюнтманын Галилейдин өзгөртүп түзүүлөрүнө карата инварианттуулугун эске алуу менен анын так бир маанилүүлүгүнө жетише алабыз.

Гиббстин (8.2.10)-теңдемеси локалдык тең салмактуу абалдагы түрдүү тең салмаксыз системалар үчүн энтропиянын балансынын туюнтмасын жогорудагыдай жол менен алууга мүмкүндүк берет.

Кайрылбас процесстердин жалпы учурунда энтропия ташуу кубулуштарынын (энергиянын, электр зарядынын ж.б. ташылышы) жана, ошондой эле системадагы ички айлануулардын (химиялык

реакциялар, релаксациялык кубулуштар) натыйжасында өндүрүлүшү мүмкүн.

### 8.3. Кайрылбас процесстердин сызыктуу термодинамикасы

#### 8.3.1. Сызыктуу закон. Кайчылаш кубулуштардын өз ара байланышы

Тең салмактуулуктан бир аз гана четтеген системаларда жүрүүчү тигил же бул кайрылбас процесстин себеби менен натыйжасынын ортосунда сызыктуу байланыш байкалат, мисалы, жылуулук өткөрүмдүүлүк кубулушунда жылуулук агымы температуранын градиентине түз пропорциялаш. Сызыктуу тең салмаксыз процесстердин термодинамикалык теориясын түзүүнүн башталышы Л.Онсагерге (1931) таандык. Учурда бул теория статистикалык негиздөөгө ээ болуп, түрдүү физикалык кубулуштарды окуп үйрөнүүдө кеңири колдонулуп келет.

Тең салмактуу абалда  $X_i$  термодинамикалык күчтөрү,  $I_i$  агымдары жана энтропиянын өндүрүлүшү  $\sigma$  нөлгө барабар. Ошондуктан *тең салмактуулуктан кичинекей четтөөлөр үчүн агымдар менен күчтөрдүн ортосунда сызыктуу байланыш жашайт* деп эсептөөгө болот:

$$I_i = \sum_{k=1}^n L_{ik} X_k \quad 8.3.1.$$

Бул сызыктуу закондогу  $L_{ik}$  коэффициенттери *феноменологиялык же кинетикалык коэффициенттер* деп аталышат. Тактап айтканда, диагоналдык  $L_{ii}$  коэффициенттери “түз” ташуу кубулуштарын, ал эми диагоналдык эмес  $L_{ik}$  коэффициенттери - түз кубулуштар менен үзгүлтүксүз байланышкан “кайчылаш” же “түйүндөш” процесстерди аныкташат. Мисалы, Фурьенин (8.2.15)- жылуулук өткөрүмдүүлүк закону боюнча температуранын градиенти жылуулуктун агымын пайда кылат:  $L_{ii} = L = \chi$ , Фиктин закону боюнча концентрациянын градиенти диффузияны пайда кылат:  $\vec{I} = -D \text{grad} c$ ,  $L = D$ ; Омдун закону боюнча потенциалдын градиенти токтун пайда кылат:  $j = -\sigma \text{grad} \varphi$ ,  $L = \sigma$  ж.б.д.у.с. Бул түз ташуу процесстери менен кошо эле аларга түйүндөш процесстер да жүрөт. Мисалы, температуранын градиенти бар учурда жылуулуктун ташылышына кошумча масса да ташылышы (*термодиффузия*) мүмкүн. Мындай кайчылаш процесстер диагоналдык эмес  $L_{ik}$

коэффициенттери аркылуу мүнөздөлүшөт. Алсак, концентрациянын градиенти жана температуранын градиенти кошо жашаган учурда массанын агымынын тыгыздыгы  $\left(\vec{I}_1\right)$

$$\vec{I}_1 = -L_{11}gradc - L_{12}gradT.$$

(8.3.1)-сызыктуу законго көп сандагы  $L_{ik}$  феноменологиялык параметрлери катышат. Бирок, убакыттын жана мейкиндиктин симметрия касиеттерин эске алуу менен мындай көз карандысыз коэффициенттердин санын азайтып алууга болот.

1931-жылы Л. Онсагер кыймылдын микроскопиялык теңдемелеринин убакыттын белгисинин өзгөртүлүшүнө карата инварианттуулугун (*убакыттык симметрия*) эске алып жана системанын сырткы күчтөрдүн аракетинин натыйжасында пайда болгон тең салмаксыз абалын тең салмактуу системадагы ири флуктуация катары кароого болот деген көз караштан пайдаланып *кайрылбас процесстердин сызыктуу областында кинетикалык коэффициенттердин матрицасы симметриялуу болорун* аныктады:

$$L_{ik} = L_{ki} \quad (i, k = 1, 2, \dots, n). \quad 8.3.2.$$

Бул туюнтма Онсагердин *кайчылаш кубулуштардын өз ара байланыш катнашы* (орусчасы – *соотношение взаимности Онсагера*) деген ат менен белгилүү. Физикалык мааниси боюнча сызыктуу кайрылбас процесстердин термодинамикасынын бул экинчи закону түрдүү процесстердин өз ара аракеттенишүүсүндө кандайдыр бир симметрия жашарын билдирет:  $X_{k \neq i}$  *турактуу кезинде*  $X_i$  *күчүнүн бир бирдикке чоңоюшу менен шартталган*  $I_k$  *агымынын көбөйүшү*  $X_k$  *бир бирдикке чоңойгондогу*  $I_i$  *агымынын көбөйүшүнө барабар.*

Электр заряддары магнит талаасында кыймылдаган учурларда жана Кориолистин күчү катышкан маселелерде микроскопиялык кайрылуучулук принцибинин өзгөчөлүктөрүнө байланыштуу Онсагердин катнаштары өзгөчө көрүнүшкө ээ болот. Магнит талаасындагы кыймылдын теңдемелери убакыттын белгиси менен бир убакта талаанын индукциясынын багытын да кошо өзгөрткөн учурда гана турактуу сакталары белгилүү. Ошондуктан бул учурда (8.3.2)-теңдеме

$$L_{ik}(\vec{B}) = L_{ki}(-\vec{B}) \quad 8.3.3.$$

көрүнүшүндө жазылат.

Кинетикалык коэффициенттердин айрым касиеттерин сызыктуу кайрылбас процесстердин термодинамикалык закондорунан тикелей келтирип чыгарууга болот. Чындыгында мындай процесстер үчүн



энтропияны өндүрүүнүн (8.1.5) жалпы формуласы термодинамикалык күчтөр боюнча квадраттык көрүнүшкө ээ болот:

$$\sigma = \sum_{i,k} L_{ik} X_i X_k . \quad 8.3.4.$$

Кайрылбас процесстер үчүн, термодинамиканын экинчи башталышына ылайык,  $\sigma > 0$ , демек (8.3.4)- нүн квадраттык формасы  $L_{ik}$  кинетикалык коэффициенттерине айрым чектөөлөрдү коет ( $L_{ii} > 0$ ,  $L_{ik}$  симметриялуу матрицалары да оң болушу керек).

Феноменологиялык коэффициенттердин матрицасын андан ары жөнөкөйлөтүү (алардын санын азайтуу) чөйрөнүн симметриясын эсепке алуу аркылуу жүргүзүлөт.

Тең салмаксыз термодинамиканын (8.1.3) негизги теңдемеси сызыктуу законду жана Онсагердин өз ара байланыш катнашын пайдалануу менен изилденүүчү системадагы түрдүү ташуу процесстеринин кинетикалык коэффициенттеринин ортосундагы жалпы байланыштарды аныктоого мүмкүндүк берет.

### 8.3.2. Тең салмаксыз системанын абалынын стационардуулугунун шарты

Тең салмаксыз процесстердин маанилүү жекече учуру болуп системага коюлган чектик шарттар аны тең салмактуу абалына жеткирбей кармап турган *стационардуу процесстер* эсептелет. Мисалы, аракет этүүлөрдүн натыйжасында системада температуранын, басымдын, заттын компоненттеринин концентрациясынын туруктуу айырмасы, потенциалдардын туруктуу айырмасы ж.б. кармалып турушу мүмкүн.

Мындай стационардуу абалдарда, тең салмактуу абалдардан айырмаланып, энтропиянын өндүрүлүшү токтобойт. Стационардуу кайрылбас процесстердин өзгөчөлүгү жана тең салмаксыз системанын абалынын стационардуулугунун шарты көптөгөн физиктер жана биологдор тарабынан талкууланган. Конкреттүү түрдө маселе системанын тең салмактуу абалы энтропиянын максималдык мааниси менен мүнөздөлгөн сыяктуу эле стационардуу процессте экстремалдык мааниге ээ боло турган кандайдыр бир физикалык чоңдукту табууга келтирилген. Бул суроого жооп Онсагер тарабынан *энергиянын эң аз чачылуу принциби* (1931-ж) түрүндө жана андан көз карандысыз Пригожин тарабынан *энтропияны өндүрүүнүн минимуму принциби* (1947-ж.) түрүндө берилген: *Тең салмактуу абалына жетүүсүнө тоскоолдук кылуучу сырткы шарттар турактуу сакталган учурда системанын кайрылбас процесс жүрүп жаткан стационардуу абалы*

энтропиянын пайда болуу ылдамдыгынын минималдык мааниге ээ болушу менен мүнөздөлөт.

Бул жобо тирүү организмдерди окуп үйрөнүүчү илимдер үчүн өтө чоң мааниге ээ.

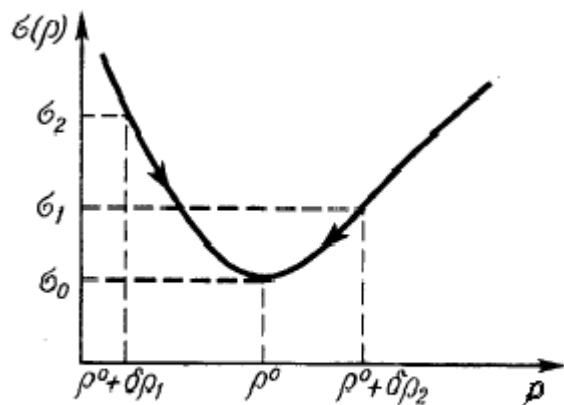
Тең салмактуу термодинамикага ылайык туюк система убакыттын өтүшү менен энтропиясы максималдуу болгон тең салмактуу абалына өтөт, ал эми термостаттагы көлөмү турактуу система – Гиббстин энергиясы минималдуу болгон тең салмактуу абалына өтөт ж.б.д.у.с. Тажрыйбалар, ушуларга окшоп эле, убакыттан көз каранды болбогон факторлордун аракетине дуушар болуп турган системада, кандайдыр бир убакыт өткөндөн кийин, энтропия эң аз өндүрүлгөн ( $\sigma = \sigma_{\min}$ ) стационардуу абал орной тургандыгын көрсөтөт. Мындай, тең салмактуулукка өтө жакын системанын абалы виртуалдык өзгөргөндө, ал өз алдынча кайра баштапкы стационардуу абалына кайтып келет (31-сүрөт,  $\rho^0$  - системанын параметринин стационардуу абалдагы мааниси). Бул жагдай стационардуу абалдын туруктуулугун көрсөтөт.

Стационардуу абалдагы системага сырттан аракет эткенде системада бул аракеттин натыйжасын начарлатуучу ички агымдар пайда болот (кайрылбас процесстердин сызыктуу термодинамикасындагы *Ле Шательенин принциби*).

Мына ошентип, тең салмактуу системалардын теориясында термодинамикалык потенциалдар кандай кызматты аткарышса, кайрылбас процесстердин сызыктуу областында энтропиянын өндүрүлүшү да ошондой эле кызматты аткарат.

Сырткы талаалар жок учурда системанын тең салмактуулукка жакын стационардуу абалдары мейкиндикте бир тектүү болушат. Бул абалдардын туруктуулугунан аларда, мейкиндиктик же убакыттык бөлүштүрүүлөр көрүнүшүндөгү, тең салмактуулуктан сапаттык түрдө айырмаланган, иреттелүүнүн өз алдынча пайда болушу мүмкүн эмес деген тыянак чыгарууга болот. Бирок, тең салмактуулуктан өтө алыстаган системаларда жагдай кескин өзгөрүшү мүмкүн.

Онсагердин тең салмаксыз сызыктуу термодинамикасынын айрым колдонулуштарын санап өтөлү.



31-сүрөт

### 8.3.3. Тең салмаксыз процесстердин сызыктуу термодинамикасынын айрым колдонулуштары

Кайрылбас процесстердин жалпы учурунда энтропиянын өндүрүлүшү системадагы ички айлануулар (химиялык реакциялар, релаксациялык кубулуштар) менен жана, ошондой эле, ташуу кубулуштары (энергиянын, электр зарядынын ж.б. ташылышы) менен да шартталат.

Термодинамиканын негизги теңдемесин, энтропиянын локалдык өсүндүсүн жана Онсагердин теңдештиктерин аталган тең салмаксыз процесстерди эсептөөгө колдонуу менен алардын жүрүү өзгөчөлүктөрү, закон ченемдүүлүктөрү жөнүндө тыянак чыгарууга, ал процесстерди түшүндүрүүгө болот.

Түрдүү табигый процесстердин ичинен эң жөнөкөйү болуп химиялык реакциялар эсептелишет, анткени алар ташуу кубулуштары менен байланышпайт жана реакция учурунда каралып жаткан системаларды гомогендүү жана изотропттуу деп эсептөөгө болот. Реакция учурунда *агымдар* мейкиндиктик координаталарда жүрбөстөн системанын курамынын  $N_i$  ( $i$  сортундагы бөлүкчөлөрдүн саны) координаталарында жүрүшөт жана тең салмактуулук абалын көздөй багытталышат.

Кайрылбас процесстердин термодинамикасынын көз карашы боюнча химиялык реакциялар системанын ички параметрлеринин релаксациясы аркылуу шартталган процесстер менен тыгыз байланышат. Тиешелүү эсептөөлөр, мисалы, турактуу температура жана басым кезинде системанын көлөмүнүн релаксациясы

$$V - V_0 = ce^{-t/\tau} \quad 8.3.5.$$

туюнтмасы аркылуу аныкталарын көрсөтөт, мында  $V_0$  – көлөмдүн тең салмактуу мааниси,  $c$  – турактуу ( $V - V_0$  айырмасынын баштапкы мааниси),  $\tau$  – релаксация убактысы.

Турактуу басым жана көлөм кезиндеги температуранын жана, турактуу көлөм жана температура кезинде басымдын релаксациялары да (8.3.5)-көрүнүшүндөгү туюнтмалардын жардамында аныкталат. Бул туюнтмалар релаксация убактысы  $\tau$  ну эксперименталдык түрдө кантип аныктоого болорун көрсөтөт.

Кайрылбас процесстердин сызыктуу термодинамикасынын негизги колдонулуштарынын бири болуп дайыма жылуулуктун кайрылбас ташылышы менен байланышкан термоэлектрдик кубулуштардын теориясын түзүү эсептелет. Алар бизге белгилүү

жылуулук жана электр өткөрүмдүүлүк кубулуштары, термоэлектрдик, термомеханикалык жана механокалорикалык кубулуштар.

Изотроптуу нерселерде үч түрдүү термоэлектрдик кубулуштар байкалары тажрыйбалардан белгилүү.

1. *Зеебектин эффекти*: эки түрдүү өткөргүчтөрдүн кошулган жерлеринин температуралары  $dT$  га айырмаланышса  $\varepsilon = \alpha_{12}dT$  э.к.к. пайда болот ( $\alpha_{12} = \alpha_1 - \alpha_2$  - берилген эки өткөргүчтүн ортосундагы э.к.к. коэффициенти). Ошондуктан, эгерде эки түрдүү өткөргүчтөн туюк чынжыр түзүп, алардын кошулган жерлерин түрдүү температураларда кармап турса, мындай чынжырда э.к.к. пайда болот.

Термо э.к.к. нын пайда болушу температуранын градиентинин натыйжасында токту ташуучулардын чынжырда кайра бөлүштүрүлүшү менен шартталган. Эгерде өткөргүчтө пайда болгон термоток анын ыссык учунан муздак учун көздөй акса, анда  $\alpha > 0$  деп эсептелет.

2. *Пельтьеин эффекти*: түрдүү өткөргүчтөрдөн түзүлгөн термикалык бир тектүү система (электр чынжыры) аркылуу электр тогу өткөндө түрдүү өткөргүчтөрдүн кошулган жерлеринде токтун күчүнө пропорциялаш жылуулук (*Пельтьеин жылуулугу*) жутулат же бөлүнүп чыгат. Бул жылуулук агымы заряддын ташылышы менен шартталган.

3. *Томсондун эффекти*: термикалык бир тектүү эмес система аркылуу электр тогу өтүп жатканда Джоуль жылуулугунан башка дагы кошумча, токтун күчүнө пропорциялаш жылуулук саны (*Томсондун жылуулугу*) бөлүнүп чыгат.

Зеебектин термоэлектрдик эффектине окшоп, бири-бири менен капилляр аркылуу туташтырылган суюктук куюлган резервуарлардын температураларын айырмалуу ( $dT = T_2 - T_1$ ) кармаганда ал идиштерде басымдардын айырмасы ( $dP = P_2 - P_1$ ) түзүлөт. Бул кубулуш *термомеханикалык эффект* деп аталат. Резервуарлар бири-биринен көңдөйчөлүү тосмо аркылуу ажыратылган учурда бул эффект *термоосмос* деп аталат.

Термомеханикалык эффектке тескери болгон кубулуш, б.а. идиштерде басымдардын айырмасын түзгөндө алардагы суюктуктардын температураларынын айырмасынын пайда болушу *механокалорикалык эффект* деп аталат.

Бул кубулуштардын теориясын кайрылбас процесстердин сызыктуу термодинамикасынын негизинде өнүктүрүп, көптөгөн практикалык суроолорго жооп алууга болот (кеңири эсептөөлөр менен, мисалы, И.П.Базаровдун Термодинамика (М.,1991, §69-70) аттуу окуу китебинен таанышууга болот).

## 8.4. Тең салмактуулуктан алыс абалдар. Сызыктуу эмес тең салмаксыз термодинамиканын негиздери

Акыркы жылдарда бир катар авторлордун, эң ириде И.Пригожиндин жана П.Гленсдорфтун, эмгектеринде термодинамикалык агымдар менен күчтөрдүн ортосундагы байланыш сызыктуу болбой калган жана Онсагердин катнаштары аткарылбаган өтө тең салмаксыз системалардын термодинамикасы өнүктүрүлдү.

Сызыктуу эмес тең салмаксыз термодинамика деген аталышка ээ болгон бул жаңы, али толук калыптана элек физикалык теория түрдүү өтө тең салмаксыз ачык системаларда иреттелген структуралардын өз алдынча (спонтандуу) пайда болушунун, б.а. алардын *өз алдынча уюшуу* (самоорганизация) процессинин мүмкүндүгүнө алып келет.

Мындай процесстердин айрым мисалдары мурдатан эле белгилүү. Мисалы, суюктуктун бир калыпта эмес ысытылган горизонталдык катмарында уячалуу структуранын түзүлүшү, турбуленттүүлүктүн жана куюндардын пайда болушу, лазердик нурдануу ж. б.

Өтө тең салмаксыз ачык системаларда жүрүүчү кайрылбас процесстерде иреттелген структуралардын түзүлүшүнө алып келүүчү кубулуштардын бардыгындагы жалпылык – молекулалардын (бөлүкчөлөрдүн) чоң топторунун чогуу (кооперативдүү) кыймылы. Өз алдынча уюшуунун мындай процесстери үчүн немец окумуштуусу Г.Хакен жалпы «*синергетика*» (грекче *synergeia* – чогуу, же кооперативдик, аракет) терминин сунуш кылган.

Синергетиканын физикалык табияты төмөнкүдөй: тең салмактуу абалдан алыс, сызыктуу эмес областта система туруктуулугун жоготот да кичинекей эле флуктуациялар андагы жаңы режимге – көптөгөн бөлүкчөлөрдүн чогуу кыймылына алып келет.

Өтө тең салмаксыз системаларда өз алдынча уюшкан иреттүү структуралардын пайда болушун аныктоо физика, химия жана өзгөчө, биология үчүн олуттуу мааниге ээ. Анткени, тирүү организмдер жана алардын түрдүү органдары өтө тең салмаксыз системалар болуп эсептелишет. Аларда химиялык заттардын концентрацияларынын, температуранын, басымдын, электрдик потенциалдын чоң градиенттери байкалат.

Жогорудагы тыянак чоң дүйнө таануучулук мааниге да ээ. Бизди курчап турган керемет уюшулган дүйнөнү диний идеологдор кудайдын жаратканы деп түшүндүрүп келишери белгилүү. Ал эми синергетика иреттелбеген системаларда табияттын закондору белгилүү бир иреттүүлүктүн пайда болушуна, бул иреттелген структуралардын андан ары татаалданышына жана өнүгүшүнө алып келерин көрсөтөт. М. Эйген

татаал, өтө тең салмаксыз системаларда түзүлгөн структуралардын өзүн-өзү кайталап көбөйүүсүн башкаруучу кандайдыр бир код түрүндөгү маалымат жазылып калышы мүмкүн экендигин көрсөттү. Сызыктуу эмес термодинамиканын өнүгүшү физиканын көз карашы боюнча жашоо кандайча пайда болгондугу жөнүндө гипотезаны айтууга мүмкүндүк берет.

Сызыктуу эмес термодинамика термодинамиканын экинчи башталышынын статусун түп-тамырынан өзгөртөт. Чындыгында эле, бул закон, *тең салмактуу абалдын чекебелиндеги кайрылбас процесстерде структуралардын бузулушун гана көрсөтпөстөн, тең салмактуулугунан өтө алыс ачык системаларда жүрүүчү кайрылбас процесстерде иреттүү структуралардын пайда болуусун да аныктарын көрөбүз*. Бардык реалдуу процесстердин кайрылбастыгын чагылтуу аркылуу термодинамиканын экинчи башталышы материянын өнүгүү законун туюнтат. Термодинамиканын экинчи башталышын ушундайча түшүнүү энтропиянын өсүшү жана туюк системада баш аламандыктын орношу жөнүндөгү бул закон менен тирүү табиятта улам татаал жана өзүн-өзү кайталап көбөйүүчү структуралардын пайда болушу жөнүндөгү Дарвиндин эволюция теориясынын ортосундагы “элестетилген” карама-каршылыкты жоет. Бул жерде маселе - тирүү организм ачык болгондугунда гана эмес экендигин белгилей кетүү зарыл, анткени чөйрө менен биргеликте ал туюк системаны түзөт, тирүү организм татаалдашкан сайын туюк системанын энтропиясы кошо өсөт.

Макроскопиялык системанын термодинамикалык тең салмактуулуктан алыс абалдарын изилдөөдө сызыктуу тең салмаксыз термодинамикадагы караганда бир кыйла татаал маселелерге дуушар болобуз.

Системанын тең салмактуулуктан өтө алыс абалдарында агымдар менен күчтөрдүн ортосундагы сызыктуу байланыш жана кинетикалык коэффициенттердин симметриялуулугу жөнүндөгү жоболор жараксыз, ал эми стационардуу абалдагы энтропиянын өндүрүлүшүнүн минималдуулугу тууралуу теория жалпы учурда туура эмес болуп калат.

Бир катар авторлор, өзгөчө И.Пригожин жана П.Гленсдорф тарабынан өтө тең салмаксыз системалардагы кубулуштардын бир кыйла кеңири теориясы өнүктүрүлдү. Бул теориянын өзөгүн түзүүдө баланстын классикалык теңдемелеринен жана абалдын туруктуулугунун кадимки термодинамикалык шарттарынан сырткары Ляпуновдун туруктуулук теориясы жана флуктуациялардын жалпыланган теориясы пайдаланылды.

Бул изилдөөлөрдө алынган негизги идеялык натыйжалар жөнүндө кыскача, сапаттык түрдө, төмөнкүлөрдү белгилеп кетүүгө болот. Тең салмактуу абалынан алыстаган сайын термодинамикалык система туруктуулугун жоготот, натыйжада кичинекей флуктуациялар тең салмактуулук абалынын чекебелинде мүмкүн болбогон жаңы, мейкиндиктик жана мезгилдик структуралардын түзүлүшүнө алып келиши мүмкүн. Ага эң жөнөкөй мисал катары гидродинамикадан бир калыпта эмес ысытылган суюктуктагы конвекциялык агымдардын «уячалуу» структурасынын, турбуленттүүлүктүн пайда болушун ж.б. келтирүүгө болот. Бул мисалдардын бардыгында молекулалардын чоң топторунун иреттелген кыймылдарын учуратабыз. Кыймылдын бул түрү системанын тең салмактуулугуна жакын абалдарында өтө аз ыктымалдыкка ээ болгону менен, тең салмактуулуктан алыс областтарда негизги абал болуп калат.

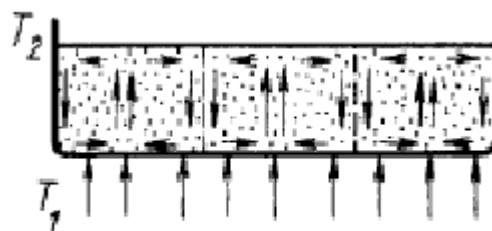
Химиялык реакцияларды изилдөөлөрдө алынган натыйжалар мындан да кызыктуу жана мааниси өтө терең. Тең салмактуулуктан алыс областтарда аралашманын компоненттери мейкиндикте бир тектүү эмес, дээрлик мезгилдүү бөлүштүрүлгөн иреттелген структуралардын кокусунан өз алдынча пайда болушуна шарт түзүлөт. Реакция процесстери убакыт боюнча иреттелип, мезгилдүү же дээрлик мезгилдүү режимдердин түзүлүшү да мүмкүн. Иреттелүүнүн бул эки түрү тең түрдүү реакцияларда эксперименттерде байкалды.

Термодинамикалык тең салмактуулуктан алыс областтарда мейкиндик жана убакыт боюнча иреттелген структуралардын пайда болуу мүмкүнчүлүктөрүнүн аныкталашы зор фундаменталдык мааниге ээ.

Тең салмактуулуктан алыс, сызыктуу эмес областтарда жүрүүчү кайрылбас процесстерде ачык системаларда пайда болуучу иреттелген структураларды Пригожин *диссипативдүү структуралар* деп атаган. Жогоруда белгилегендей, мейкиндиктик, мезгилдик (жүрүү удаалаштыгы боюнча иреттелген, кайталануучу) жана мейкиндиктик-мезгилдик диссипативдүү структуралар жашайт. Алардын айрымдарына кыскача токтололу.

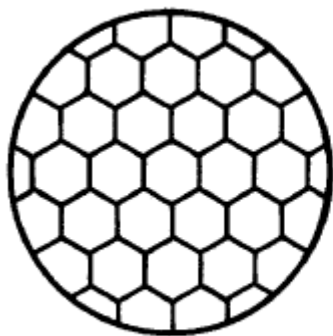
Мейкиндиктик диссипативдүү структуралардын эң жөнөкөй мисалы болуп 1900-жылы ачылган *Бенардын уячалары* эсептелет.

Эгерде суюктуктун горизонталдык катмарын астынан катуу ысытсак, анда анын астыңкы жана үстүнкү беттеринин арасында температуранын айырмасы  $\Delta T = T_1 - T_2 > 0$  түзүлөт.

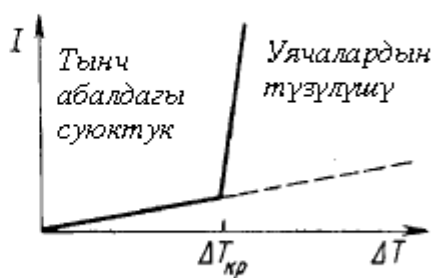


32-сүрөт

Температуранын айырмасы анын кандайдыр-бир критикалык маанисинен аз болгон учурларда ( $\Delta T < \Delta T_{кр}$ ) суюктуктун түбүнө берилген жылуулук саны жогоруга жылуулук өткөрүмдүүлүк жолу менен таралат жана суюктук кыймылсыз кала берет. Бирок, температуранын айырмасы анын критикалык маанисинен ашканда суюктукта конвекциялык кыймыл башталат: муздак суюктук төмөн түшүп, ысыганы жогору көтөрүлөт. Карама-каршы багытталган бул эки агымдын (32-сүрөт) бөлүштүрүлүшү өз алдынча жөнгө салынып (уюшулуп), натыйжада, аарынын уюгу сыяктуу, туура алты бурчтуу уячалардын системасы түзүлөт (33-сүрөт). Мындай ар бир уячанын четтеринде суюктук төмөн түшүп, ортосунан жогору көтөрүлөт. Суюктуктун төмөнкү бетинен жогорку бетине бирдик убакыт ичинде ташылган толук жылуулук агымы  $I$  нин  $\Delta T$  дан көз карандылыгы 34-сүрөттө көрсөтүлгөн.  $\Delta T > \Delta T_{кр}$  учурунда жылуулук өткөрүүчү кыймылсыз суюктуктун абалы туруксуз



33-сүрөт



34-сүрөт

болуп (34-сүрөттө пунктир сызыгы), анын ордуна Бенардын конвекциялык уячалары түрүндөгү туруктуу режим орнойт. Анткени, температуралардын айырмасы чоң болгон учурларда кыймылсыз суюктук улам көбөйгөн жылуулук санын ташууга үлгүрбөй калат, ошондуктан жаңы конвекциялык режим түзүлөт.

Критикалыкка чейинкиден критикалыктан кийинкиге өтүүдө системанын симметриясы өзгөрөт. Ошондуктан тең салмаксыз системалардагы өтүүлөрдү *кинетикалык фазалык өтүүлөр* деп аташат.

Жогоруда белгилегендей, диссипативдүү структуралар абалдары сызыктуу эмес теңдемелердин жардамында сүрөттөлүүчү өтө тең салмаксыз көп бөлүкчөлүү системаларда гана пайда болушат. Суюктуктагы Бенардын уячаларын түшүндүрүү үчүн гидродинамиканын сызыктуу эмес теңдемелери, Ляпуновдун критерийлери колдонулат.

Мейкиндиктик диссипативдүү структуралардын башка бир мисалы болуп азоттун иондору менен нурдантылган (соктурулган)



молибдендин микроструктурасын изилдөөдө Дж.Эванс тарабынан 1970-жылы байкалган *вакансиялык түгөйлөрдүн торчосу* эсептелет. Металлдарды ылдамдатылган бөлүкчөлөр (нейтрондор, иондор) менен нурдантуу алардын кристаллдык торчосунда чекиттик дефектерди – вакансияларды жана түйүндөр аралык атомдорду жаратары белгилүү. Температура жогорулаганда бул вакансиялар кристаллда кыймылдап жылып, сфералык вакансиялык көңдөйчөлөр жана тегиздиктеги дислокациялык илмектер көрүнүшүндөгү дефектердин татаал кластерлерин түзүшөт. Адатта мындай кластерлер мейкиндикте бир тектүү жайгашышат. Бирок, нурдантуунун белгилүү бир шарттарында вакансиялык көңдөйчөлөр туура «ири торчолор» түрүндө, иреттелип жайгашышат. Бул торчо түрү боюнча металлдын торчосуна окшош, бирок анын мезгили металлдын торчосунун мезгилинен жүздөгөн эсе чоң болот. Вакансиялык көңдөйчөлөрдүн мындай иреттелген структураларынын түзүлүшү чекиттик дефектердин вакансиялык майда кластерлер менен сызыктуу эмес динамикалык өз ара аракеттенишүүлөрү жана көңдөйчөлөрдүн өз ара диффузиялык аракеттенишүүлөрү менен түшүндүрүлөт.

*Сатурндун шакекчелери* да мейкиндиктик диссипативдүү структуралардын мисалы болот. Бүгүнкү аппаратуралар Сатурнда 90 дон ашуун шакекчени даана ажыратып көрсөтө алат. Мындай структуранын түзүлүшү планетанын айланасында кошо айлануучу заттын бир калыпта эместиги жана анын Сатурнга тартылуусу, заттын айрым бөлүкчөлөрүнүн өз ара аракеттенишүүсү менен шартталган.

Убакыт боюнча иреттелген диссипативдүү структуралардын түзүлүшүнө алып келүүчү өз алдынча уюшуучу кубулуштар айрым сызыктуу эмес химиялык реакциялардын жүрүшүндө байкалат. 1951-жылы Б.П.Белоусов лимон кислотасын калийдин броматы ( $\text{KBrO}_3$ ) жана церийдин сульфатынын ( $\text{Ce}(\text{SO}_4)_2$ ) аралашмасынын жардамында кычкылдандыруунун гомогендик мезгилдүү химиялык реакциясын ачкан. Күкүрт кислотасында эритилген заттардын бул аралашмасында алгач церийдин калыбына келүү ( $\text{Ce}^{4+} \rightarrow \text{Ce}^{3+}$ ), андан кийин анын кычкылдануу ( $\text{Ce}^{3+} \rightarrow \text{Ce}^{4+}$ ) реакциялары жүрөт жана бул процесс башынан кайталанат. Натыйжада, эритменин түсү кызылдан ( $\text{Ce}^{3+}$  көп болгондо) көккө ( $\text{Ce}^{4+}$  көп болгондо) чейин жана тескерисинче өзгөргөн *мезгилдүү убакыттык* структура пайда болот. Түстүн өзгөрүп термелүүсү 4 минутадай мезгил менен кайталанып, бардык реагенттер түгөнгө чейин, б. а. система термодинамикалык тең салмактуулуктан алыс турган чакта улана берет. Б.П.Белоусовдун изилдөөлөрү А.М.Жаботинский тарабынан улантылып өнүктүрүлгөн.

Айрым учурларда жука катмарда жүрүүчү сызыктуу эмес химиялык реакциялар *шакектик жана спиралдык толкундар* көрүнүшүнө ээ болгон мейкиндиктик-убакыттык структуралардын түзүлүшүнө алып келет. Мындай структуралардын түзүлүшү концентрациялардын локалдык флуктуациялары жана реагенттердин диффузиясы менен байланышкан.

Мына ошентип, бүгүнкү тең салмаксыз термодинамика – өзүнө континуумдун физикасын, илешимдүү чөйрөлөрдүн гидродинамикасын жана магнитодинамикасын, жылуулук кубулуштарын жана беттик кубулуштарды камтыган жалпы феноменологиялык же макроскопиялык физика болуп эсептелет.

# IX ГЛАВА

## ФИЗИКАЛЫК КИНЕТИКАНЫН ЭЛЕМЕНТТЕРИ. КИНЕТИКАЛЫК ТЕНДЕМЕЛЕР

### 9.1. Смолуховскийдин теңдемеси. Деталдык тең салмактуулук принциби

Тең салмаксыз абалдагы бир атомдуу газды карайлы. Координаттары болуп  $\vec{r}$  радиус-векторунун үч проекциясы жана  $\vec{p}$  импульс векторунун үч проекциясы эсептелген  $\mu$ - мейкиндиги түшүнүгүн кайрадан колдонолу. Анда газдын жалпы абалы 6 өлчөмдүү  $\mu$ - мейкиндигинде өздөрүнүн фазалык траекториялары боюнча которулуп жүрүүчү  $N$  фазалык чекиттердин көптүгү аркылуу мүнөздөлөт.

$f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  бөлүштүрүү функциясын же сүрөттөөчү (фазалык) чекиттердин тыгыздыгын киргизели. Бул функция тең салмаксыз системанын жалпы учурунда анын бөлүкчөлөрүнүн  $\vec{r}$  координаттарынан,  $\vec{p}$  импульстарынан жана ошондой эле,  $t$  убакыттан да көз каранды.

Системанын бөлүкчөлөрүнүн санынын мейкиндиктик тыгыздыгы  $n = n(\vec{r}, t)$   $f$  бөлүштүрүү функциясы менен

$$n(\vec{r}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3 p \quad 9.1.1.$$

туюнтмасы аркылуу байланышат. Ал эми бөлүкчөлөрдүн санынын импульстар мейкиндигиндеги тыгыздыгы

$$n(\vec{p}, t) = \int f(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3 r \quad 9.1.2.$$

формуласы боюнча аныкталат.

$f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  бөлүштүрүү функциясы

$$\iint f(\vec{r}, \vec{p}, t) d^3 r d^3 p = N \quad 9.1.3.$$

шарты менен нормалаштырылат, мында  $N$ - газдын бөлүкчөлөрүнүн жалпы саны.

$f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  бөлүштүрүү функциясынын айкын көрүнүшүн жана анын убакыттын өтүшү менен өзгөрүү закон ченемдүүлүгүн (эволюциясын) аныктоо физикалык кинетиканын эң маанилүү маселелеринин бири болуп эсептелет. Бөлүштүрүү функциясын билүү системанын тең салмаксыз абалдарына тиешелүү болгон маселелердин кеңири классын чечүүгө мүмкүндүк берет. Мындай маселелердин катарына ташуу (жылуулук өткөрүмдүүлүк, диффузия, ж.б.) кубулуштарындагы кинетикалык коэффициенттерди эсептөөнү ж.б. д.у.с. кошууга болот.

Классикалык кинетикада тең салмаксыз процесстерди изилдөө методу газ «тыгыз» же «сейректелген» экендигине өтө күчтүү көз каранды. Бул түшүнүктөрдү тагыраак ажыратуу критерийлерин тургузалы.

Жөнөкөй болсун үчүн нейтралдуу бөлүкчөлөрдөн турган газды карайлы. Бул учурда молекулалардын өз ара аракеттенишүү күчтөрү алардын ортосундагы аралыктын чоңоюсу менен тез азайышат. Молекулалардын өз ара аракеттенишүү күчүнүн таасир этүү радиусун  $r_0$  менен белгилеп алалы. Анын чоңдугу температурага көз каранды, бирок анчалык чоң эмес температураларда  $r_0$  дү болжол менен ( $10^{-7}$ - $10^{-8}$ )см тартибиндеги турактуу чоңдук деп эсептей алабыз.  $r_0$  дү чындыгында, молекулалардын өз ара аракеттенишүүлөрүнүн потенциалдык энергиясы алардын кыймылынын орточо кинетикалык энергиясы менен бирдей тартиптеги мааниге жеткен учурдагы аралык катары аныктоо керек. Молекулалардын орточо кинетикалык энергиясы температурага түз, ал эми алардын ортосундагы тартышуу күчтөрүнүн бардык багыттар боюнча орточолоштурулган потенциалдык энергиясы  $r^6$  даражасына тескери пропорциялаш, ошондуктан  $r_0 \sim T^{-\frac{1}{6}}$ . Эки молекуланын ортосундагы аралык  $r_0$  дөн чоң болуп турган кездерде алар бири-биринен көз карандысыз, инерция же сырткы талаанын аракети боюнча гана кыймылдашат. Молекулалар бири-бирине  $r_0$  дөн кичине аралыктарга жакындашканда гана аракеттенишүүлөр алардын кыймылынын мүнөзүн кескин өзгөртөт.

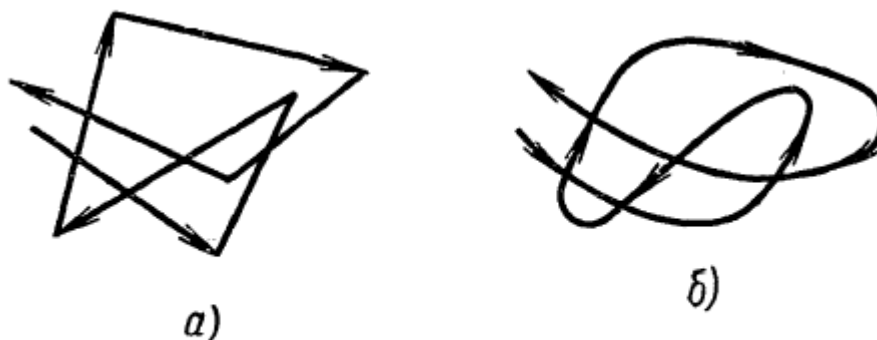
Айталы, газ молекулаларынын эркин жол узундугу  $\lambda \gg r_0$  жана, тиешелүү түрдө, алардын эркин кыймылынын узактыгы  $\tau$  эки молекуланын аракеттенишүүсүнүн узактыгынан ( $\tau_0$ ) бир кыйла чоң болгондой *сейректелген* болсун дейли.  $\lambda \sim \frac{1}{nr_0^2}$ , мында  $n$ -молекулалардын санынын тыгыздыгы (концентрациясы) болгондуктан газдын сейректелгендигинин критерийин

$$\frac{1}{nr_0^2} \gg r_0 \quad \text{же} \quad n \ll r_0^{-3} \quad \text{көрүнүшүндө жазууга болот.}$$

Биздин баалоого ылайык  $r_0 \sim (10^{-7} \div 10^{-8})$  см, демек  $n \ll (10^{21} \div 10^{24})$  см<sup>-3</sup>. Нормалдуу шарттарда абанын молекулаларынын концентрациясы  $n_0 \sim 10^{19}$  см<sup>-3</sup> (*Лошмидтин саны*), демек бул шарттарда абаны, жогорудагы критерийге ылайык, сейректелген газ катары эсептей берүүгө болот.

Сейректелген газдарга молекулалардын «кагылышуулары» түшүнүгүн киргизип, ал процессти бир молекула экинчисинин аракет этүү сферасында кыймылдаган кезде алардын ар биринин кыймылынын өзгөрүшү катары түшүнүүгө болот.  $\tau \gg \tau_0$  болгондуктан кагылышуу процессин өтө тез, «кирпик какканчалык» убакытта ишке ашат деп

эсептей алабыз. Молекулалардын ылдамдыгы чектүү болгондуктан кагылышуу убактысы ичинде алардын координаттары өзгөрбөйт ( $\Delta x_i = g_i \tau_0 \approx 0$ ) десе болот, бирок молекулалардын ылдамдыгынын же импульсунун проекциялары чектүү чоңдукка өзгөрөт ( $\Delta g_i = w_i \tau_0 \neq 0$  жана  $\Delta p_i = F_i \tau_0 \neq 0$ ). Ал үчүн  $\tau_0 \rightarrow 0$  умтулганда молекулалардын ылдамдануулары  $w_i$  да, аракеттенишүү күчтөрү  $F_i$  да чексиз чоңоюп кетет деп эсептешибиз керек. Мына ошентип, бул жакындаштырууда кагылышуу эки молекуланын импульстарынын секирик түрдө өзгөрүшү менен гана коштолот (35а-сүрөт). Кагылышуу учурунда импульстун секирик түрдө өзгөргөндүгүнө байланыштуу, молекуланын  $\mu$ -мейкиндиктеги сүрөттөөчү чекити да бир абалдан экинчи абалга «секирип» өтөт. Ошол себептен бул жакындаштырууда  $\mu$ -мейкиндигиндеги бөлүштүрүү функциясы үчүн үзгүлтүксүздүктүн теңдемесин колдонууга болбойт. Бул жагдай  $\mu$ -мейкиндигинде бөлүштүрүү функциясынын булактары (источники) жана орлору (стоки) жашайт, алардын кубаттуулугу молекулалардын өз ара кагылышуулары менен аныкталат дегенди билдирет. Жогоруда сөз болгон жакындаштыруу кийинки параграфтарда кененирээк каралат.



35-сүрөт

Ага карама-каршы пределдик учур болгон тыгыз ( $nr_0^3 \geq 1$ ) газдарда  $\lambda \leq r_0$ ,  $\tau \leq \tau_0$  (35-сүрөт, б). Мындай шартта кагылышуу түшүнүгү маанисин жоготот, анткени молекула ар дайым коңшулаш молекулалардын аракет этүү сферасынын ичинде кала берет. Ушул пределдик учурду карап көрөлү.

Тыгыз газдарда ар бир бөлүкчө бир убакта өтө көп сандагы кошуналары менен аракеттенишкендиктен анын калган бөлүкчөлөрдүн бөлүштүрүлүшүнө таасири өтө аз. Ошондуктан системанын бөлүкчөлөрүнүн бөлүштүрүлүү функциясын табуу маселеси бир бөлүкчөнүн калган бөлүкчөлөр түзгөн талаадагы кыймылы жөнүндөгү маселеге келтирилет. Бөлүкчөлөр тынымсыз кыймылдап тургандыктарына байланыштуу бул талаа флуктуацияланып турат,

ошондуктан тандап алган бөлүкчөнүн кыймылы *стохастикалык* (кокустук, ыктымалдык) мүнөзгө ээ. Мындай кокустук процесстери үчүн «бөлүкчөнүн  $x$  чекитинен  $\tau$  убактысынын ичинде  $y$  чекитинин чекебелиндеги көлөмдүн  $dy$  элементине өтүшүнүн ыктымалдыгы» түшүнүгүн киргизүүгө болот.  $x$  жана  $y$  символдору аркылуу чекиттерди, ал эми  $dy$  аркылуу  $\mu$ -мейкиндигинин көлөмүнүн элементин белгилейли.  $W(y, x | Y_{\tau}, t)$  аркылуу  $x$  чекитинен  $y$  чекитине  $\tau$  убактысынын ичинде өтүүнүн ыктымалдыгынын тыгыздыгын белгилеп, өтүүнүн ыктымалдыгы үчүн

$$d_w = W(y, x | Y_{\tau}, t) dy$$

#### 9.1.4.

туюнтмасына ээ болобуз, мында  $t$ - фазалык чекиттин  $x$  тен чыккан убакты.

(9.1.4)- формула өзүнө процесстин жүрүшү жөнүндө кандайдыр бир гипотезаны кошо камтып турат. Анткени,  $x$  тен  $y$  ке өтүүнүн ыктымалдыгы, жалпы учурда, (9.1.4)-формулада көрсөтүлгөн аргументтерден башка дагы бөлүкчөнүн мурдагы абалдарынан –  $t$  га чейинки убакыт моменттериндеги координаттардан жана импульстардан да көз каранды болушу мүмкүн. Эгерде байланыш (корреляция) эки удаалаш окуялардын арасында гана жашаса, анда мындай процесстер **Марковдун чынжырлары** деп аталышат. Башка сөз менен айтканда, Марковдук процесстерде бир чекиттен башкасына өтүүнүн ыктымалдыгы процесстин алдыңкы тарыхынан көз каранды болбойт, б.а бөлүкчө мурдагы абалдарын «эсине» тутуп калбайт. Марковдук модель өтө тыгыз газдарда жүрүүчү кинетикалык процесстерди жогорку тактыкта түшүндүрөт.

Бөлүкчөнүн  $x$  тен  $t+\tau$  убактысынын ичинде  $z$  чекити аркылуу  $y$  чекитине өтүүсүн карайлы, мында  $t$  -  $x$  тен  $z$  ке, ал эми  $\tau$  -  $z$  тен  $y$  ке өтүү узактыгы.

$x$  тен  $z$  ке жана  $z$  тен  $y$  ке өтүү процесстери бири-биринен көз карандысыз болушкандыктан  $x$  тен  $dy$  интервалына  $dz$  ке чейинки тактыкта аныкталган ортодогу  $z$  чекити аркылуу өтүүнүн ыктымалдыгы үчүн

$$W(y, z | Y_{\tau}, t_0 + t) W(z, x | Y_t, t_0) dz dy$$

туюнтмасын алабыз.

Жалпы  $W(y, x | Y_{t+\tau}, t_0)$  ду табуу үчүн жогорудагы көбөйтүүчүнү ортодогу  $z$  чекитинин бардык абалдары боюнча интегралдоо жетиштүү. 36-сүрөттөн көрүнүп тургандай, ортодогу  $t_0 + t$  убактысын каалагандай тандап алган күндө да биз  $x$  чекитинен убакыттын  $t_0$  моментинде чыгып,  $t_0 + t + \tau$  моментинде  $y$  ке келүүчү бардык фазалык траекторияларды талдап чыгабыз. Натыйжада  $W$  функциясы үчүн

**Смолуховскийдин теңдемеси** деген аталыштагы сызыктуу эмес интегралдык теңдемени алабыз:

$$W(y, x, Y, t+\tau, t_0) = \int dz W(y, z, Y, t_0+t) W(z, x, Y, t, t_0) .$$

9.1.5.

Бул теңдемени келтирип чыгарууда биз Марковдук процесс үчүн өтүүнүн ыктымалдыгынын аныктоосун, ыктымалдыктарды көбөйтүүнүн жана кошуунун теоремаларын гана пайдаландык. Ошондуктан Смолуховскийдин теңдемеси өтө жалпы мүнөзгө ээ жана анын колдонулуу областы да өтө кеңири.

*Деталдык тең салмактуулук принциби* деп аталган маанилүү физикалык законду киргизели.

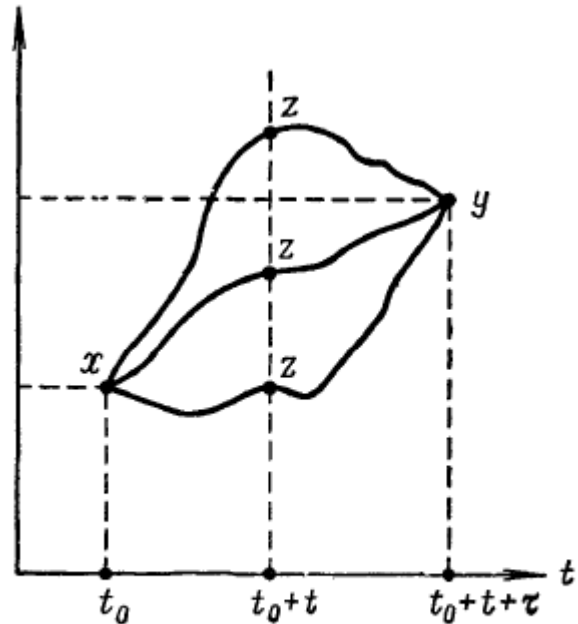
Системанын микроабалдарынын убакыттын өтүшү менен өзгөрүшүн туюнтуучу закондор же классикалык механиканын же кванттык механиканын закондору болуп эсептелишери белгилүү. Туюк система үчүн бул эки закон тең убакыттын белгисинин өзгөрүшүнө-  $t$  ны  $(-t)$  га алмаштырууга карата симметриялуулук касиетине ээ болушат. Ошондуктан  $x \rightarrow y$  жана

$y \rightarrow x$  түз жана тескери өтүүлөрдүн ыктымалдыктары өз ара барабар, ал эми  $W(y, x, Y, \tau, t)$  функциясы аргументтердин биринчи  $(x, y)$  түгөйлөрү боюнча симметриялуу болушу керек:

$$W(y, x, Y, \tau, t) = W(x, y, Y, \tau, t)$$

9.1.6.

Мына ушул тыянак *деталдык тең салмактуулук принциби* деп аталат. Бул, жогорудагыдай формадагы, принцип спинсиз (спиндеринин суммасы нөлгө барабар) бөлүкчөлөрдүн туюк системасы үчүн алынды жана ал убакыттан көз каранды болбогон сырткы талаада жайгашкан система үчүн да жарактуу. Спиндик моментке ээ болгон бөлүкчөлөрдүн системасы үчүн (9.1.6)- туюнтмасы аткарылбайт. Бирок, баштапкы жана акыркы абалдардын спиндери боюнча орточолоштурулган ыктымалдыктар үчүн деталдык тең салмактуулук принциби аткарыларын далилдөөгө болот.



36-сүрөт

Аягында, «деталдык тең салмактуулук принциби» деген аталыш төмөнкүдөй шартка: (9.1.6) – барабардыгы динамикалык тең салмактуулук  $x$  тен  $y$  ке жана  $y$  тен  $x$  ке ортодогу кандайдыр бир  $z$  абалдары аркылуу эмес, түздөн-түз  $x \Leftrightarrow y$  схемасы боюнча жүрүүчү өтүүлөр аркылуу камсыздалып турган  $x, y$  чекиттеринин каалаган түгөйлөрү үчүн аткарылышы менен байланыштуу экендигин эскерте кетели.

## 9.2. Фоккер-Планктын теңдемеси. Броун кыймылы

Тыгыз газдагы тең салмаксыз процесстердин маанилүү жекече учурун – *жай жүрүүчү процесстерди* карап көрөлү. Мындай процесстер үчүн Смолуховскийдин теңдемесин бир кыйла жөнөкөйлөштүрүп, Фоккер-Планктын сызыктуу дифференциалдык теңдемесине келтирүүгө болот.

Макроскопиялык системада *жай процесстер* жүрүп жатсын дейли. Бул шарт системанын абалынын өтө чоң өзгөрүүлөрү өтө аз ыктымалдуу дегенди билдирет. Демек, системанын тең салмактуулугунан анча айырмаланбаган, ага жакын абалдарына өтүүлөр гана чоң ыктымалдыкка ээ.

Понтрягин сунуш кылган методду пайдаланып Фоккер-Планктын теңдемесин келтирип чыгарууга өтөлү.

$t_0=0$  деп эсептеп (9.1.5) – теңдемени

$$W(y, x | Y, t+\tau, 0) = \int dz W(y, z | Y, \tau, t) W(z, x | Y, t, 0)$$

### 9.2.1.

көрүнүшүндө жазып алалы.

$\mu$ -мейкиндигинде интегралдануучу жана төмөнкү чектик шарттарды канааттандыруучу  $g(x)$  функциясын киргизели:  $g(x)$  функциясы жана анын каалаган тартиптеги туундуларынын баары  $YxY \rightarrow \infty$  кезде нөлгө айланышат.

$$g(x) \rightarrow 0, \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} \rightarrow 0, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_k} \rightarrow 0, \dots \quad 9.2.2.$$

(9.2.1) теңдемени  $g(y)dy$  ке көбөйтүп,  $y$  тин бардык маанилери боюнча интегралдайлы:

$$\int W(y, x | t + \phi 0) g(y) dy = \iint W(y, z | \tau, t) W(z, x | t, 0) g(y) dy dz \quad 9.2.3.$$

Бул теңдеменин оң тарабындагы  $g(y)$  ну  $(y_i - z_i)$  нин даражасы боюнча Тейлордун катарына ажыраталы:

$$g(y) = g(z) + \frac{\partial g}{\partial z_i} (y_i - z_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_k} (y_i - z_i)(y_k - z_k) + \dots$$

(кайталануучу индекстер боюнча суммалоо 1ден бга чейин жүргүзүлөт).



Бул катарды (9.2.3) түн оң тарабына коюп :

$$\int W(y, x | t + \phi, 0) g(y) dy = \iint [ g(z) + \frac{\partial g}{\partial z_i} (y_i - z_i) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_k} (y_i - z_i)(y_k - z_k) + \dots ] \times 9.2.4.$$

$$\times W(y, z | \phi, t) W(z, x | t, 0) dy dz$$

туюнтмасын алабыз. Теңдеменин оң тарабындагы биринчи мүчөнү у боюнча интегралдап жана  $\int W(y, x | \tau, t) dy = 1$  нормалаштыруу шартын эске алып (9.2.4)-теңдемени төмөнкүдөй көрүнүштө өзгөртүп жаза алабыз:

$$\int g(z) \frac{W(y, z | \phi, t) - W(y, z | \phi, 0)}{\phi} dy - \int a_i^{(\phi)}(z, t) \frac{\partial g}{\partial z_i} W(z, x | t, 0) dz - 9.2.5.$$

$$- \frac{1}{2} \int b_{ik}^{(\phi)}(z, t) \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_k} W(z, x | t, 0) dz - \dots = 0,$$

мында  $a_i^{(\phi)}(z, t) = \frac{1}{\phi} \int (y_i - z_i) W(y, z | \phi, t) dy,$

$$b_{ik}^{(\phi)}(z, t) = \frac{1}{\phi} \int (y_i - z_i)(y_k - z_k) W(y, z | \phi, t) dy .$$

Алты өлчөмдүү  $a_i^{(\tau)}(z, t)$  вектору  $\mu$ -мейкиндиктеги сүрөттөөчү (фазалык) чекиттин  $\tau$  убакыт интервалындагы орточо ылдамдыгынын  $z$  чекитиндеги жана убакыттын  $t$  моментиндеги мааниси. Ал эми алты өлчөмдүү  $b_{ik}^{(\tau)}(z, t)$  тензору сүрөттөөчү чекиттин  $\tau$  убакыт интервалындагы жылышынын  $i$ -чи жана  $k$ -чы проекцияларынын ортосундагы корреляция функциясынын убакыт бирдигине тиешелүү мааниси. Бул тензордун шпуру (диагоналдык элементтери) сүрөттөөчү чекиттин жылышынын орточо квадратынын бирдик убакыттагы маанисин берет:

$$b_{ii}^{(\tau)}(z, t) = \frac{1}{\phi} \int (y_i - z_i)^2 W(y, z | \phi, t) dy .$$

(9.2.5)-катардын кийинки коэффициенттери сүрөттөөчү чекиттин жылышынын жогорку тартиптеги корреляцияларын жана орточо даражаларын туюнтат. Жогоруда белгиленгендей, жай процесстер үчүн  $\tau$  нын кичине маанилеринде катардын кийинки мүчөлөрүн алгачкы эки мүчөсүнө салыштырмалуу өтө кичине деп эсептеп, аларды кийинки эсептөөлөргө кошпойбуз. Анткени, кыска  $\tau$  убактысынын ичинде чоң  $(y_i - z_i)$  жылыштарынын ыктымалдыгы өтө аз жана интеграл астындагы функцияга  $(y_i - z_i)$  айырмасы канчалык чоң  $n$  даражада кирсе тиешелүү корреляциялык коэффициент ошончолук кичине болот.

(9.2.5)-формуладан  $\tau \rightarrow 0$  кезде пределге өтөлү жана  $a_i(z, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} a_i^{(\tau)}(z, t),$

$b_{ik}(z, t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} b_{ik}^{(\tau)}(z, t)$  деп белгилеп алалы. Мындагы экинчи жана үчүнчү кошулуучуну төмөнкүдөй түрдө өзгөртүп алабыз:

$$\int a_i(z, t) \cdot W(z, x|t, 0) \frac{\partial g}{\partial z_i} dz = \int \left\{ \frac{\partial}{\partial z_i} [a_i(z, t) W(z, x|t, 0) g(z)] - g(z) \frac{\partial}{\partial z_i} [W(z, x|t, 0) a_i(z, t)] \right\} dz \quad 9.2.6.$$

$$\frac{1}{2} \int b_{ik}(z, t) W(z, x|t, 0) \frac{\partial^2 g}{\partial z_i \partial z_k} dz = \frac{1}{2} \int \left\{ \frac{\partial}{\partial z_i} \left[ b_{ik}(z, t) W(z, x|t, 0) \frac{\partial g}{\partial z_k} \right] - \frac{\partial}{\partial z_k} \left[ g(z) \frac{\partial}{\partial z_i} b_{ik}(z, t) W(z, x|t, 0) \right] + g(z) \frac{\partial^2}{\partial z_i \partial z_k} [b_{ik}(z, t) W(z, x|t, 0)] \right\} dz \quad 9.2.7.$$

(9.2.6)-нын оң тарабындагы биринчи жана (9.2.7)-нин биринчи эки кошулуучулары Гаусстун теоремасынын жардамында чексиз алыстатылган чек аралык бет боюнча интегралга өзгөртүлүп түзүлүшү мүмкүн, анда алар (9.2.2)-чек аралык шартка ылайык нөлгө айланып кетишет. Калган кошулуучулардагы интегралдоонун өзгөрүлмөсүн  $y$  аркылуу кайра белгилеп, (9.2.5)-тен төмөнкүнү алабыз:

$$\int g(y) \left\{ \frac{\partial W(y, x|t, 0)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_i} [W(y, x|t, 0) a_i(y, t)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} [W(y, x|t, 0) b_{ik}(y, t)] \right\} dy = 0,$$

мындан  $g(y)$  функциясы каалагандай эркин тандалып алынгандыктан ар кандай чектүү маанидеги  $y$  үчүн төмөнкү теңдемеге ээ болобуз:

$$\frac{\partial W(y, x|t, 0)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_i} [W(y, x|t, 0) a_i(y, t)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} [W(y, x|t, 0) b_{ik}(y, t)] = 0. \quad 9.2.8.$$

(9.2.8)-теңдеме **Фоккер-Планктын теңдемеси** же **мономолекулалык кинетикалык теңдеме** деп аталат. Теңдеменин акыркы аталышы системанын бөлүкчөлөрүнүн коллективдүү кыймылы жөнүндөгү маселени биз бир бөлүкчөнүн калган бөлүкчөлөрдүн орточолоштурулган талаасындагы кыймылы жөнүндөгү маселеге айландыра алгандыгыбызды чагылдырат.

Эми өтүү ыктымалдыгынын  $W(y, x|Y\tau, t)$  тыгыздыгынын  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f(x, t)$  бөлүштүрүү функциясы менен байланышын көрсөтөлү. Айталы,  $t=0$  кезинде  $\mu$ -мейкиндиктин  $x$  чекитиндеги бөлүштүрүү функциясы  $f(x, 0)$  болсун. Анда  $t$  убакытынын ичинде  $dx$  көлөмүнөн кеткен жана ошол эле убакытта  $dx$  көлөмүнө келген бөлүкчөлөрдүн санынын айырмасы

$$[f(x, t) - f(x, 0)] dx = dx \int [W(x, z|t, 0) f(z, 0) - W(z, x|t, 0) f(x, 0)] dz.$$

Акыркы теңдемени  $dx$  ка кыскартып жана  $\int W(z, x|t, 0) dz = 1$  нормалаштыруу шартын эске алуу менен

$$f(x, t) = \int W(x, z|t, 0) f(z, 0) dz$$

9.2.9.

теңдемесине ээ болобуз. Бул теңдеме  $f(z,0)$  бөлүштүрүү функциясын  $W(x,z|Yt,0)$  гө көбөйтүп,  $z$  боюнча интегралдоо бөлүкчөлөрдү  $\mu$ -мейкиндигинде бир убакытта  $(x-z)$  векторуна жана убакыт боюнча  $t$  аралыгына (Одөн  $t$  га чейин) жылдырууга эквиваленттүү экендигин көрсөтөт.

(9.2.8)-теңдемени  $f(x,0)$  гө көбөйтүп,  $x$  боюнча интегралдоо аркылуу  $f(y,t)$  бөлүштүрүү функциясы үчүн Фоккер-Планктын теңдемесин алабыз:

$$\frac{\partial f(y,t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y_i} [f(y,t)a_i(y,t)] - \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_k} [f(y,t)b_{ik}(y,t)] = 0.$$

Акыркы теңдемени өзгөртүп,  $\mu$ -мейкиндигиндеги үзгүлтүксүздүктүн теңдемесинин көрүнүшүндө жазып алууга болот:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial j_k}{\partial y_k} = 0, \text{ мында } j_k = a_k(y,t)f(y,t) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y_i} [b_{ik}(y,t)f(y,t)] \quad 9.2.10.$$

агымдын тыгыздыгынын алты өлчөмдүү векторунун компоненттери.

Фоккер-Планктын теңдемесин мындай көрүнүштө жазуу айрым жалпылоолорду жүргүзүүгө жол ачат. Эми  $x, y \dots$  символдору аркылуу  $\mu$ -мейкиндиктин чекиттерин эмес, кадимки үч өлчөмдүү мейкиндиктеги чекиттерди белгилейли. Бул учурда да Фоккер-Планктын теңдемесине алып келген ой-жүгүртүүлөр өз күчүн сактайт, жана биз эми үч өлчөмдүү мейкиндикте агымынын тыгыздыгы (9.2.10)-көрүнүшүндө болгон (9.2.9)-теңдемени алабыз. Бул учурда  $a_k$  вектору бөлүкчөнүн кадимки ылдамдыгы  $\mathcal{V}$  ны, ал эми  $b_{ik}$  тензору - бөлүкчөнүн координата окторунун багыттары боюнча жылышууларынын арасындагы корреляция функциясын аныктайт.

Фоккер-Планктын теңдемесинин жөнөкөй колдонулуштарын карап көрөлү.

Сырткы талаа аракет этпеген газды карайлы. Бул учурда мейкиндиктин жана убакыттын бир тектүүлүгүнүн натыйжасында өтүүнүн ыктымалдыгынын тыгыздыгы убакыттан көз каранды болбой, баштапкы жана акыркы чекиттердин арасындагы аралыктан гана көз каранды болушу мүмкүн:

$$W(y, x | Y_\tau, t) = W(Yy - x | Y, \tau).$$

Ошондуктан бул учурда

$$a_i(y,t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int W(|y-x|, \tau)(y_i - x_i) dx = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int W(|z|, \tau) z_i dz = 0$$

жана, интеграл астындагы функциянын тактыгынын натыйжасында

$$b_{ik}(y,t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int W(|y-x|, \tau)(y_i - x_i)(y_k - x_k) dx = b\delta_{ik},$$

мында

$$b = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} \int W(|z|, \tau) z_k^2 dz = \text{const.}$$

Анда Фоккер-Планктын теңдемеси

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} b \nabla^2 f$$

көрүнүшүн алат жана белгилөөлөрүнө чейинки тактыкта диффузиянын

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \nabla^2 f$$

теңдемеси менен дал келет. Бул теңдемелерди өз ара салыштырып,  $b$  коэффициенттери менен  $D$  диффузия коэффициенттеринин ортосундагы байланышты аныктоочу **Эйнштейндин катышына** ээ болобуз:

$$b = 2D.$$

Фоккер-Планктын теңдемеси суюктуктагы же газдагы броун бөлүкчөсүнүн кыймылын да жакындаштырган түрдө түшүндүрө алат. Бул учурда  $x$  ти броун бөлүкчөсүнүн координатасы деп түшүнүп, үч өлчөмдүү мейкиндик үчүн жазылган  $b_{ii}^{(\tau)}$  коэффициентинин формуласын пайдаланып,

$$\Delta x^2 = 3b\tau = 6D\tau$$

туюнтмасына ээ болобуз, мындан броун бөлүкчөсүнүн жылышынын орточо квадраты убакытка пропорциялаштыгын көрүүгө болот.

Броун бөлүкчөлөрү сырткы талаада жайгашкан учурда агымдын (9.2.10)-туюнтмасындагы биринчи кошулуучу да нөлдөн айырмалуу болот.  $b$  коэффициентинин координатадан көз карандылыгын эсепке албай (бул шарт бир тектүү талаалар үчүн так, ал эми бир тектүү эмес талааларда кыска аралыктарда жакындаштырылган түрдө аткарылат)  $\mathbf{j}$  агымы үчүн

$$\mathbf{j} = \mathbf{af} - \frac{1}{2} b \nabla f \quad \text{туюнтмасын алабыз.}$$

Тең салмактуу абалда бөлүкчөлөрдүн бөлүштүрүлүшү Больцмандын

$$f = f_0 e^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}}$$

формуласы менен сүрөттөлөт, ал эми  $\mathbf{j}$  тогу (агымы) нөлгө тең (эч кандай агым болбойт), демек,

$$\bar{\mathbf{j}} = f_0 \left( \bar{\mathbf{a}} + \frac{1}{2} \frac{b \nabla U(x,y,z)}{kT} \right) e^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}} = f_0 \left( \bar{\mathbf{a}} - \frac{b \vec{\mathbf{F}}}{2kT} \right) e^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}} = 0.$$

Мындан 
$$\bar{\mathbf{a}} = \frac{b \vec{\mathbf{F}}}{2kT} = \frac{D \vec{\mathbf{F}}}{kT} = q \vec{\mathbf{F}},$$

мында  $q = \frac{D}{kT}$  - бөлүкчөнүн кыймылдуулугу («элпектиги»),

$$\vec{\mathbf{F}} = -\nabla U \quad \text{- күч.}$$

Мына ошентип, илешимдүү суюктуктун (газдын) бөлүкчөнүн кыймылына каршылыгын аныктоочу **Стоксун законун** алдык. Каршылык күчү бөлүкчөнүн ылдамдыгына түз пропорциялаш.

$$\bar{F} = \frac{\bar{a}}{q}, \quad (\bar{a} \Rightarrow \bar{g}).$$

Сфера формасындагы бөлүкчөлөр үчүн  $q = \frac{1}{6\pi\eta r}$ , мында  $\eta$ - илешимдүүлүк коэффициенти,  $r$ - бөлүкчөнүн радиусу. Эми броун бөлүкчөсүнүн жылышынын орточо квадратынын формуласы:

$$\Delta x^2 = \frac{kT\tau}{\pi\eta r} \quad \text{көрүнүшүн алат.}$$

Бул формула өз убагында  $k$  -турактуулугун жана  $N_A = \frac{R}{k}$  Авогадро санын аныктоонун алгачкы мүмкүнчүлүктөрүн берди жана атомдордун бар экендигинин чындыгын далилдеди.

### 9.3. Больцмандын кинетикалык теңдемеси

Эми кинетикалык теориянын колдонулушунун экинчи пределдик учурун – сейректелген газдарды изилдөөгө өтөлү. Жөнөкөй учурда мындай системанын мисалы болуп классикалык идеалдуу газ эсептелиши мүмкүн.

Тең салмаксыз туюк система тең салмактуулук абалына өтүп жатканда анын энтропиясы өсөрү (флуктуациянын чоңдугуна чейинки тактыкта) белгилүү. Демек, тең салмаксыз системанын бөлүштүрүү функциясы убакыттан да көз каранды болот. Бир атомдуу газдын мисалында тең салмактуу абалга өтүүнүн жалпы закон ченемдүүлүктөрүн карап көрөлү. Бир бөлүкчөлүк бөлүштүрүү функциясынын аргументтери үчүн бөлүкчөнүн  $x_1, x_2, x_3$  координаттарын жана ылдамдыгынын  $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3$  проекцияларын тандап алсак, аныкталуучу кинетикалык теңдеме бир кыйла ыңгайлуу көрүнүштү алат. Анда  $\mu$ -мейкиндигиндеги координаталар болуп  $x_i, \vartheta_i$  ( $i=1,2,3$ ) чоңдуктары эсептелишет. Микроабалды сүрөттөөчү чекиттер  $\mu$ -мейкиндигинде убакыттын ар бир  $t$  моментинде

$$f(\bar{r}, \bar{\vartheta}, t) = f(x_1, x_2, x_3, \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3) \quad \text{тыгыздыгы менен}$$

бөлүштүрүлүшөт.  $\mu$ -мейкиндиктин көлөмүнүн элементин

$$dx_1 dx_2 dx_3 d\vartheta_1 d\vartheta_2 d\vartheta_3 = d\bar{r} d\bar{\vartheta}$$

аркылуу белгилейли. Бөлүштүрүү функциясынын нормалаштыруу шартын

$$\int f(\bar{r}, \bar{\vartheta}, t) d\bar{r} d\bar{\vartheta} = N \quad 9.3.1.$$

көрүнүшүндө тандап алалы, мында  $N$ - бөлүкчөлөрдүн жалпы саны, интегралдоо газ ээлеген толук көлөм  $V$  жана ылдамдыктын мүмкүн болгон бардык маанилери ( $-\infty$  ден  $+\infty$  ге чейин) боюнча жүргүзүлөт.

$f(\vec{r}, \vec{\vartheta}, t) d\vec{r} d\vec{\vartheta} = dn$  – убакыттын  $t$  моментинде координаттары жана ылдамдыктарынын компоненттери  $x_i \div x_i + dx_i$ ,  $\vartheta_i \div \vartheta_i + d\vartheta_i$  интервалдарында жаткан бөлүкчөлөрдүн санын аныктайт. Биз мурда ([43]) бирге нормалаштырылган жана координаттардын жана ылдамдыктардын (же импульстардын) ыктымалдыктарынын тыгыздыктарынын маанилерин туюнткан классикалык бир бөлүкчөлүк  $f(\vec{r}, \vec{\vartheta})$  бөлүштүрүү функцияларын колдонуп келгендигибизди белгилей кетели. Тең салмактуулук учурунда  $f(\vec{r}, \vec{\vartheta}, t)$  функциясы Максвелл-Больцмандын бөлүштүрүүсүнө дал келүүчү

$$f(\vec{r}, \vec{\vartheta}) = ce^{-\frac{m\vartheta_i^2}{2kT} - \frac{U_i}{kT}}$$

көрүнүшүнө ээ болуусу зарыл. Биздин милдетибиз  $f(\vec{r}, \vec{\vartheta}, t)$  функциясынын тең салмактуулукка жеткенге чейинки убакыттагы эволюциясын сүрөттөө болуп эсептелет.

Тең салмаксыз системанын бөлүштүрүү функциясынын убакыттан көз карандылыгы эки себеп менен шартталган болушу мүмкүн:

- 1) бөлүкчөлөрдүн координаттар мейкиндигиндеги жана, сырткы күчтөр аракет эткен учурда – ылдамдыктар мейкиндигиндеги которулуштары (дрейфи).
- 2) кагылышуулар учурунда бөлүкчөлөрдүн ылдамдыктарынын өзгөрүшү.

Тиешелүү түрдө,  $f$  тин убакыт боюнча жекече туундусу да эки кошулуучудан турат.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{op} + \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{kaz} \quad 9.3.2.$$

Кагылышууларды жок деп эсептеп, бөлүкчөлөрдүн координаттар жана ылдамдыктар мейкиндигиндеги дрейфтик кыймылын карайлы. Формалдуу түрдө фазалык (сүрөттөөчү) чекиттердин фазалык траекторияларды бойлото кыймылын кандайдыр бир суюктуктун агымы сыяктуу элестетүүгө болот. Бөлүкчөлөр бири-бири менен өз ара кагылышпаган учурда фазалык чекиттердин тыгыздыгынын өзгөрүшүн алты өлчөмдүү мейкиндиктеги үзгүлтүксүздүктүн

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_k j_k = 0 \quad 9.3.3.$$

тендемесинин жардамында сүрөттөөгө болор эле.  $\mu$  - мейкиндигиндеги агымдын тыгыздык векторунун компоненттери  $f\vartheta_i$  ге жана  $fw_i$  ге барабар, мында  $i=1,2,3$  жана  $w_i = d\vartheta_i/dt$  - бөлүкчөнүн ылдамдануусунун проекциялары. Акыркыларды эске алып (9.3.3)-тендемени

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (f\vartheta_k) + \frac{\partial}{\partial \vartheta_k} (fw_k) = 0 \quad 9.3.4.$$

көрүнүшүндө жаза алабыз. Экинчи жана үчүнчү кошулуучулардагы  $g_k$  жана  $w_k$  көбөйтүүчүлөрүн, алар тиешелүү өзгөрүлмөлөрдөн көз каранды болушпагандыктан, туундунун белгисинен сыртка чыгарып жазууга болот. Ылдамдануунун  $w_k$  проекциялары газ сырткы талаага жайгаштырылган учурда гана нөлдөн айырмалуу болушат.

Жогоруда белгиленгендей (35-а сүрөттү караңыз) газдын молекулаларынын ортосундагы кагылышуулар координаталар турактуу кезде ылдамдыктын проекцияларынын секирик түрүндө өзгөрүшүнө, демек  $\mu$ - мейкиндигинде сүрөттөөчү чекиттердин секирик түрдө которулушуна алып келет. Бул жакындаштырууда сүрөттөөчү (фазалык) чекиттер  $\mu$ - мейкиндигинде бөлүнүп алынган көлөмдүн чек арасын кесип өтпөстөн туруп, анын бир бөлүгүнөн «жоголушуп», башка бир бөлүгүндө «пайда болушат». Бул жагдайды, б.а «кирпик какканчалык тез» болуучу кагылышууларды эсепке алуу, үзгүлтүксүздүктүн теңдемесинин оң тарабына мейкиндиктин берилген чекитинде берилген ылдамдыктагы молекулалардын «булагын» жана «орун» киргизүүнү талап кылат. Ошондуктан (9.3.4)-теңдеме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + g_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + w_k \frac{\partial f}{\partial g_k} = I = q_{бул} - q_{ор} \quad 9.3.5.$$

теңдемесине алмаштырылат, мында  $I$ - кагылышуулардын интегралы (*stoss integral*) деп аталат, ал эми  $q_{бул}$  жана  $q_{ор}$  -булактардын жана орлордун кубаттуулугу – фазалык мейкиндиктин бирдик көлөмүндө убакыт бирдиги ичинде пайда болгон же жоголгон,  $r$  чекитиндеги ылдамдыгы  $g$  нын чекебелиндеги ылдамдыктардын бирдик интервалына туура келген молекулалардын саны. Биздин милдетибиз – кагылышуулардын интегралын бөлүштүрүү функциясы аркылуу туюнтуп алуу болуп эсептелет. Ал үчүн  $q_{бул}$  жана  $q_{ор}$  лорду табууга киришели. Газды андагы үч, төрт ж.б сандагы молекулалардын бир убакта жакындашып калуу мүмкүнчүлүгүн жокко чыгарып, жуптук кагылышууларды гана эсепке алгандай даражада жетишерлик сейректелген деп эсептейли.

Бири  $\bar{g}, \bar{g} + d\bar{g}$  интервалындагы, ал эми экинчиси  $\bar{g}', \bar{g}' + d\bar{g}'$  интервалындагы ылдамдыктарга ээ болушкан молекулалардын кагылышууларын карайлы. Кагылышуудан кийин бул молекулалар тиешелүү түрдө  $\tilde{g}, \tilde{g} + d\tilde{g}$  жана  $\tilde{g}', \tilde{g}' + d\tilde{g}'$  интервалдарындагы ылдамдыктарга ээ болушат. Бирдик көлөмдө убакыт бирдиги ичинде ишке ашуучу мындай кагылышуулардын саны ылдамдыктары  $(\bar{g}, \bar{g} + d\bar{g})$ ,  $(\bar{g}', \bar{g}' + d\bar{g}')$  интервалдарына туура келген кагылышуучу молекулалардын санына жана кагылышуудан кийинки ылдамдыктын

маанилеринин  $d^3\tilde{g}$  жана  $d^3\tilde{g}'$  интервалдарына пропорциялаш. Бул санды

$$P(\tilde{g}, \tilde{g}' | g, g') ff' d^3 g d^3 g' d^3 \tilde{g} d^3 \tilde{g}' \quad 9.3.6.$$

көрүнүшүндө жазууга болот, мында кыска болсун үчүн  $f=f(\bar{r}, \tilde{g}, t)$ ,  $f' = f(\bar{r}, \tilde{g}', t)$  деп белгилеп алдык,  $P(\tilde{g}, \tilde{g}' | g, g')$  - эки молекуланын кагылышууга чейинки жана кагылышуудан кийинки ылдамдыктарынан көз каранды болгон  $g, g' \rightarrow \tilde{g}, \tilde{g}'$  кагылышуусунун ыктымалдыгынын тыгыздыгы, жазууну жеңилдетүү үчүн мындан ары  $r$  жана  $g$  нын үстүнө вектордук белгини (жебени) сызбай эле коелу. (9.3.6)-туюнтманы  $g', \tilde{g}, \tilde{g}'$  лардын мүмкүн болгон бардык маанилери боюнча интегралдоо аркылуу ылдамдыктары  $(g, g+dg)$  интервалында жаткан молекулалардын бирдик көлөмдө жана убакыт бирдиги ичиндеги кагылышууларынын толук санын табабыз.  $dg$  интервалы өтө кичине болгондуктан алынуучу туюнтма бир эле убакта берилген типтеги молекулалардын санынын азайышын да аныктайт.

Мына ошентип, (9.3.5)-теңдемедеги орлордун кубаттуулугу

$$q_{op} = \iiint P(\tilde{g}, \tilde{g}' | g, g') ff' d^3 g d^3 \tilde{g} d^3 \tilde{g}' \quad 9.3.7.$$

Ылдамдыгы  $g$  га барабар молекулалардын санынын азайышына алып келүүчү  $g, g' \rightarrow \tilde{g}, \tilde{g}'$  процесстери менен кошо эле тескери,  $g$  ылдамдыгындагы молекулалардын санын көбөйтүүчү,  $\tilde{g}, \tilde{g}' \rightarrow g, g'$  процесстери да жүрүп турат. Бул процесстерди кубаттуулугу

$$q_{бул} = \iiint P(g, g' | \tilde{g}, \tilde{g}') \tilde{f} \tilde{f}' d^3 g d^3 \tilde{g} d^3 \tilde{g}' \quad 9.3.8.$$

болгон булактар жаратат, мында  $P(g, g' | \tilde{g}, \tilde{g}') - \tilde{g}, \tilde{g}' \rightarrow g, g'$  өтүүлөрүнүн ыктымалдыгынын тыгыздыгы,  $\tilde{f} = f(r, \tilde{g}, t)$ ,  $\tilde{f}' = f(r, \tilde{g}', t)$ .  $f, f', \tilde{f}, \tilde{f}'$  туюнтмаларынын баарында бөлүштүрүү функциясынын биринчи аргументи  $\bar{r}$  бирдей, анткени «кирпик какканчалык тез кагылышуу» жакындаштыруусунда кагылышуу учурунда координаталар өзгөрбөйт, ал эми кагылышып жаткан молекулалардын борборлорунун жайгашуу айырмачылыгын эсепке албайбыз.

Мына ошентип, кагылышуулардын интегралы үчүн төмөнкү туюнтмага ээ болобуз.

$$I = q_{бул} - q_{op} = \iiint [P(g, g' | \tilde{g}, \tilde{g}') \tilde{f} \tilde{f}' - P(\tilde{g}, \tilde{g}' | g, g') ff'] d^3 g d^3 \tilde{g} d^3 \tilde{g}' \quad 9.3.9.$$

Кагылышуулардын саны  $ff'$  же  $\tilde{f}\tilde{f}'$  көбөйтүндүсүнө пропорциялаш деген божомол «кагылышуучу молекулалардын ылдамдыктарынын ортосунда корреляция жок» деген тыянакка негизделген жана иш жүзүндө анчалык туура болбой тургандыгын белгилей кетүү зарыл. Тагыраак теорияда  $ff'$  же  $\tilde{f}\tilde{f}'$  көбөйтүүчүлөрү **жуптук** (эки



**бөлүкчөлүк**) деп аталуучу **бөлүштүрүү функцияларына** алмаштырылышы керек.

Деталдык тең салмактуулук принциби орундалсын дейли. Кванттык-механикалык көз караш боюнча бул шарт биз же спинсиз бөлүкчөлөрдөн турган газды карап жаткандыгыбызды, же газдын бөлүкчөлөрүнүн баштапкы жана акыркы абалдарынын спиндери боюнча орточолоштурууну жүргүзгөндүгүбүздү билдирет. Классикалык механиканын көз карашы боюнча бул шарт газдын бөлүкчөлөрү сфералык симметрияга ээ деп эсептегенибизди билдирет. Сфералык эмес формадагы бөлүкчөлөр үчүн деталдык тең салмактуулук принциби аткарылбай тургандыгын Больцман өзү белгилеп кеткен.

Деталдык тең салмактуулук принциби аткарылган шартта  $P$  функциясы баштапкы жана акыркы абалдардын аргументтеринин ордуларын алмаштырууга карата симметриялуу деп эсептейбиз.

$$P(\tilde{g}, \tilde{g}' | g, g') = P(g, g' | \tilde{g}, \tilde{g}') \quad 9.3.10.$$

Муну эске алып (9.3.5)-теңдемени төмөнкүдөй жазууга болот:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} (f g_k) + \frac{\partial}{\partial g_k} (f w_k) = \iiint P(g, g' | \tilde{g}, \tilde{g}') (\tilde{f} f' - f f') d^3 g' d^3 \tilde{g} d^3 \tilde{g}' \quad 9.3.11.$$

Бул теңдеме **Больцмандын кинетикалык теңдемеси** деп аталат. Ал идеалдуу газдардын бир бөлүкчөлүк бөлүштүрүү функциясынын убакыттын өтүшү менен молекулалардын дрейфтик кыймылынын жана жуптук кагылышууларынын натыйжасында өзгөрүшүн сүрөттөйт.

(9.3.11)-формуладан көрүнүп тургандай Больцмандын теңдемеси татаал, сызыктуу эмес интегро-дифференциалдык теңдеме жана айрым жекече учурларда гана анын жакындаштырылган чечимин табууга болот. Бирок Больцмандын теңдемеси жалпы мүнөздөгү бир катар маанилүү натыйжаларды алууга мүмкүндүк берет.

Кагылышуулар теориясын пайдаланып, Больцмандын теңдемесин башка түргө келтирип жазууга болот:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + g_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + w_k \frac{\partial f}{\partial g_k} = \iint (\tilde{f} f' - f f') q d\sigma(q, \vec{e}) d^3 g', \quad 9.3.12.$$

мында  $q = g' - g$  молекулалардын кагылышканга чейинки салыштырма ылдамдыгы,  $\vec{e} = (\tilde{g} - g)$  ны бойлото багытталган бирдик вектор,  $d\sigma(q, e)$ - чачыроонун дифференциалдык (эффективдүү) кесилиши. Акыркы чоңдук аракеттенишүүнүн потенциалынан,  $q$  салыштырма ылдамдыктан жана  $e$  векторунан, б.а. чачыроо бурчунан көз каранды.

(9.3.12)-теңдемеден, жекече учурда, газдын стационардуу ( $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ ) абалы дайыма эле тең салмактуу боло бербестигин байкоого болот, анткени стационардуу абал теңдемедеги дрейфтик мүчөнүн жана

кагылышуулардын интегралынын өз ара компенсацияланышынын эсебинен да орношу мүмкүн:

$$g_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + w_k \frac{\partial f}{\partial g_k} = \iint (\mathbf{f}' - ff') q d\sigma(q, e) d^3 g'.$$

Акыркы теңдеменин оң жана сол тарабынын ар бири өзүнчө нөлгө теңелгенде гана системада жалпы тең салмактуулук орнойт.

## 9.4. Боголюбовдун теңдемелери

Больцмандын теңдемесин ал өзү сунуш кылган идея боюнча (9.3)-төгүдөй жол менен келтирип чыгаруу өтө так деп эсептелиши мүмкүн эмес. Анткени бул теңдемени  $\mu$ - мейкиндигинде оң тарабы булактарды (кагылышуулардын интегралын) камтыган үзгүлтүксүздүктүн теңдемеси көрүнүшүндө жазуу, биринчиден,  $f(\vec{r}, \vec{g}, t)$  бөлүштүрүү функциясынын убакыттын өтүшү менен өзгөрүшү түрдүү табиятка ээ болгон эки процеске карата аддитивдүү дегенди билдирет. (9.3.11) же (9.3.4) теңдемелеринин сол тарабындагы  $\partial_i \partial f / \partial x_i$  жана  $w_i \partial f / \partial g_i$  мүчөлөрү тыгыздыктын жана сырткы талаалардын градиентинин жашашынын натыйжасында пайда болуучу газдын агымдарын мүнөздөшөт, ал эми теңдеменин оң тарабындагы мүчөсү молекулалардын кагылышууларын эсепке алганда пайда болот. Мына ошентип, агымдар жана кагылышуулар бири-бирине таасир этишпейт деп эсептелет. Экинчиден, кагылышуулардын интегралында  $f, f^1, \tilde{f}, \tilde{f}^1$  функцияларынын мейкиндиктин бир гана  $\vec{r}$  чекитиндеги маанилери алынат, ошол эле учурда молекулалардын чектүү өлчөмдөрүн эсепке алуу  $f, f^1$  функцияларында жана  $\tilde{f}, \tilde{f}^1$  функцияларында координаттар түрдүүчө тандалып алынышын талап кылат.

Андан ары, биз мурда белгилегендей, Больцмандын теңдемесин классикалык жол менен келтирип чыгарууда молекулалардын ылдамдыктарынын ортосунда корреляция жок деп эсептелет. Акырында, эң маанилүүсү, Больцмандын теңдемесинде молекулалардын жуптук кагылышуулары гана эсепке алынат, үч, төрт жана андан көп молекулалардын топторунун бир убакта кагылышууларын эсепке алуунун кандайдыр бир жолу көрсөтүлгөн эмес. Тыгыз газдар үчүн мындай кагылышууларды эсепке алуу өтө маанилүү.

Жуптук кагылышуулардын жакындаштыруусунда молекулалардын эркин жол узундугу газдын тыгыздыгына тескери пропорциялаш

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n} = \frac{\omega}{\sigma},$$

мында  $\sigma$ -жуптук кагылышуулардын эффективдүү кесилиши. Бул жагдай ташуу коэффициенттери: -  $\chi$  - жылуулук өткөрүмдүүлүк коэффициенти жана  $\eta$ -илешимдүүлүк коэффициенти  $n$  тыгыздыктан, демек, басымдан көз каранды болбой тургандыгына алып келери белгилүү. Көп бөлүкчөлүк кагылышууларды эсепке алганда  $\lambda$  үчүн туюнтма төмөнкүдөй көрүнүштө жазылышы керек:

$$\lambda = \frac{1}{\sigma n + \alpha n^2 + \beta n^3 + \dots} = \lambda_0 \left[ 1 + \frac{A}{\omega} + \frac{B}{\omega^2} + \dots \right],$$

мында  $\alpha, A$  коэффициенттери үч бөлүкчөлүк,  $\beta$  жана  $B$  - төрт бөлүкчөлүк ж.б.д.у.с. кагылышууларды эсепке алганда пайда болушат. Натыйжада, эркин жол узундугу жана ташуу коэффициенттери үчүн, статистикалык физикада идеалдуу эмес газдын абалынын теңдемеси сыяктуу, вириалдык катар пайда болушу зарыл ([43] 2.5.8-формула).

Жогоруда айтылгандарга байланыштуу кинетикалык теңдемени келтирип чыгаруу жана аны жалпылоо маселесине олуттуураак мамиле жасоо максатка ылайыктуу. Муну Н.Н. Боголюбов сунуш кылган бир топ жалпы жана тагыраак методдун жардамында аткарууга болот. Боголюбовдун методуна кыскача токтололу.

Абалдары классикалык механикада  $2N$  сандагы  $\vec{r}_i, \vec{g}_i$  векторлорунун жардамында аныкталган бирдей  $N$  бөлүкчөдөн турган система берилсин. Кыска болсун үчүн  $\vec{r}_i$  жана  $\vec{g}_i$  лердин көптүгүн  $x_i$  символу, ал эми  $d^3 r_i d^3 g_i$  көбөйтүндүсүн  $dx_i$  символу аркылуу белгилеп алалы.  $6N$  өлчөмдүү  $\Gamma$ -мейкиндигинин координаталары катары бардык бөлүкчөлөрдүн координаттарын жана ылдамдыктарынын проекцияларын эсептеп  $\Gamma$ -мейкиндигинде  $F^{(N)}(x_1, \dots, x_N, t)$  бөлүштүрүү функциясын киргизели. Анда

$$F^{(N)}(x_1, \dots, x_N, t) dx_1 dx_2 \dots dx_N$$

туюнтмасы сүрөттөөчү чекит  $\Gamma$ -мейкиндигинин  $dx_1 dx_2 \dots dx_N$  көлөмүндө жайгашкандыгынын ыктымалдыгын берет, ал эми  $F^{(N)}$  функциясы бирге нормалаштырылган:

$$\int F^{(N)}(x_1, x_2, \dots, x_N, t) dx_1 dx_2 \dots dx_N = 1 \quad 9.4.1.$$

Мындан ары сырткы талаалар жок болсун жана бөлүкчөлөр  $U(\mathbf{r}_{i,k}) = m u(\mathbf{r}_{i,k})$  аракеттенишүү потенциалы аркылуу өз ара аракеттенишет деп эсептейли ([43] 4.4 караңыз). Чек аралык эффекттерди болтурбоо үчүн  $N \rightarrow \infty$ ,  $V \rightarrow \infty$ , ал эми  $\omega = \frac{V}{N}$  чектүү болгон термодинамикалык пределдик учурду карайбыз.

Мындан аркы ой жүгүртүүлөр

$$\frac{\partial F^{(N)}}{\partial t} + \hat{\mathcal{E}}_N F^{(N)} = 0 \quad 9.4.2.$$

көрүнүшүндө жазылган Лиувилдин теңдемесине негизделет, мындагы  $\hat{\mathcal{E}}_N$  оператору *Лиувилдин оператору* деп аталат да

$$\hat{\mathcal{E}}_N = \sum_i \vec{g}_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} + \sum_i \vec{w}_i \frac{\partial}{\partial \vec{g}_i} = \sum_i \vec{g}_i \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} + \sum_{i,k \neq i} \vec{w}_{ik} \frac{\partial}{\partial \vec{g}_i} \quad 9.4.3.$$

формуласы аркылуу аныкталат, мындагы  $w_{ik} = -\partial u(r_{ik}) / \partial \vec{r}_i$  -  $k$ -чы бөлүкчө менен аракеттенишүүнүн натыйжасында  $i$ -чи бөлүкчөгө берилген ылдамдануу.

Лиувилдин (9.4.2)-теңдемесин түздөн-түз интегралдоо, Ньютондун, Лагранждын, Гамильтондун жана Гамильтон-Якобинин теңдемелерин интегралдоо сыяктуу эле, эбегейсиз көп сандагы бөлүкчөлөрдөн турган системалар үчүн жараксыз жана кереги да жок.

Ошондуктан макроскопиялык тең салмаксыз физиканын маселелерин чечүү үчүн ыктымалдуулук методдоруна өтүү зарыл.

Бул максатта  $n$ - бөлүкчөлүк

$$V^{-n} F_n^{(N)}(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = \int F^{(N)}(x_1, x_2, \dots, x_N, t) dx_{n+1} \dots dx_N \quad 9.4.4.$$

бөлүштүрүү функцияларын киргизебиз. Бул функциялар (9.4.1)-теңдемеден алынуучу

$$V^{-n} \int F_n^{(N)}(x_1, x_2, \dots, x_n, t) dx_1 dx_2 \dots dx_n = 1 \quad 9.4.5.$$

нормалаштыруу шартына баш ийишет. Эгерде биз  $F_n^{(N)}(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  функцияларына ыктымалдуулук маанисин ыйгарсак, анда  $V^{-n} F_n^{(N)}(x_1, \dots, x_n, t)$  функциялары да статистикалык мүнөзгө ээ болушат. Кыскартуу үчүн мындан ары  $F_n^{(N)}$  дердеги (N) индексин жазбайбыз.

$V^{-n} F_n(x_1, \dots, x_n, t)$  туюнтмасы системанын (системалардын ансамблдеринин эмес!) алгачкы  $n$  бөлүкчөлөрү  $(\vec{r}_i, \vec{r}_i + d\vec{r}_i)$ ,  $(\vec{g}_i, \vec{g}_i + d\vec{g}_i)$  интервалдарында жаткан координаттарга жана ылдамдыктарга ээ болушунун ыктымалдыгын туюнтат.

$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)$  функциялары баш ийген дифференциалдык теңдемелердин системасын келтирип чыгаралы. Бул максатта (9.4.2)-теңдемени  $V_n dx_{n+1} \dots dx_N$  ге көбөйтөлү да (9.4.3)-туюнтмадан пайдаланып алынган барабардыкты интегралдайлы:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_n(x_1, \dots, x_n, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} [F_n(x_1, \dots, x_n, t) \vec{g}_i] + \frac{1}{V} \sum_{i=n+1}^N \int \frac{\partial}{\partial \vec{r}_i} [F_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_i, t) \vec{g}_i] dx_i + \\ & + \sum_{n=1}^n \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial \vec{g}_i} [F_n(x_1, \dots, x_n, t) \vec{w}_{ik}] + \frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \sum_{k=n+1}^N \frac{\partial}{\partial \vec{g}_i} \int F_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_k, t) \vec{w}_{ik} dx_k + \\ & + \frac{1}{V} \sum_{i=n+1}^N \sum_{k=1}^n \int \frac{\partial}{\partial \vec{g}_i} [F_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_i, t) \vec{w}_{ik}] dx_i + \frac{1}{V^2} \sum_{i=n+1}^N \sum_{k=n+1}^N \iint \frac{\partial}{\partial \vec{g}_i} [F_{n+2}(x_1, \dots, x_n, x_i, x_k, t) \vec{w}_{ik}] dx_i dx_k = 0 \end{aligned} \quad (9.4.6.)$$

Бул теңдемедеги үчүнчү, алтынчы жана жетинчи кошулуучулар нөлгө барабар экендигин белгилеп кетели. Чындыгында эле бул кошулуучулардын ар бири үч өлчөмдүү дивергенциядан: үчүнчү кошулуучу-  $i$ -чи молекуланын координаттар мейкиндигинде, алтынчы жана жетинчи кошулуучулар  $i$ -чи молекуланын ылдамдыктар мейкиндигинде алынган интегралдар болушат. Гаусстун теоремасы боюнча алар чек аралык бет боюнча интегралга өзгөртүлүп түзүлүшү

мүмкүн. Бирок, газдын каалаган бөлүкчөсүнүн координаттары идиштин абсолюттук катуу дубалдарында жаткан чекиттерге туура келсе  $F_n$  функциясы нөлгө айланат жана, ошондой эле,  $g_i \rightarrow \infty$  умтулганда да  $F_n$  бөлүштүрүү функциясы нөлгө умтулат. Ошондуктан дивергенциядан алынган интеграл координаттык мейкиндикте да, ылдамдыктардын мейкиндигинде да нөлгө барабар. Ал эми (9.4.5)-теңдемедеги бешинчи кошулуучуну төмөнкүдөй өзгөртүп түзүүгө болот.  $k$  боюнча суммадагы айрым кошулуучулар бири-биринен интегралдоонун өзгөрүлмөсүнүн белгилениши менен гана айырмаланышат:

$$\frac{1}{V} \sum_{i=1}^n \sum_{k=n+1}^N \frac{\partial}{\partial g_i} \int F_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x_k, t) \vec{w}_{ik} dx_k = \frac{N-n}{V} \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial g_i} \int F_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}, t) \vec{w}_{i,n+1} dx_{n+1}.$$

Мына ошентип, акырында теңдемелердин төмөнкү системасына ээ болобуз:

$$\frac{\partial F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t)}{\partial t} + \hat{E}_n F_n(x_1, x_2, \dots, x_n, t) = -\frac{N-n}{V} \sum_{i=1}^n \int \vec{w}_{i,n+1} \frac{F_n(x_1, \dots, x_{n+1}, t)}{\partial g_i} dx_{n+1} \quad (9.4.7.)$$

Бул система чет элдик адабияттарда *ББКГИ-системасы* деп аталат (Борн, Боголюбов, Кирквуд, Грин, Ивон). Кыска болсун үчүн жана аны ар тараптан терең анализдөө Боголюбовго таандык экендигине байланыштуу (9.4.7)-теңдемени мындан ары **Боголюбовдун теңдемелеринин системасы** деп атайлы. (9.4.7)-формуладагы  $\hat{E}_n$  –  $n$  бөлүкчөдөн турган подсистема үчүн Лиувилдин оператору. Боголюбовдун теңдемелеринин системасы бири-бирине «чиркелип уланып кетүүчү» теңдемелерди түзөт, анткени  $F_n$  функциясы үчүн теңдемелер оң тарабында  $F_{n+1}$  функцияларын камтып турушат. Физикалык мааниси боюнча бул жагдай  $n$  молекуладан түзүлгөн ( $n < N$ ) жана калган  $N-n$  молекулалар менен аракеттенишүүчү ар кандай топтун туюк эместигин чагылдырат. Лиувилдин оператору, (9.4.7)-ден көрүнүп тургандай, бөлүкчөлөрдүн туюк системасы үчүн  $F_n(x_1, \dots, x_n, t)$  функциясынын убакыттын өтүшү менен өзгөрүүсүн (эволюциясын) бир маанилүү аныктайт, ошол эле убакта (9.4.7)-теңдеменин оң тарабы анын туюк эместигин сүрөттөйт.

$F_N$  функциясы үчүн (9.4.7)-системанын эң акыркы теңдемеси туюк жана Лиувилдин (9.4.2)-теңдемесине тең күчтүү экендигин белгилеп кетели. Математикалык көз караш боюнча (9.4.7)-теңдемелер системасын интегралдоону мына ушул эң акыркы теңдемеден баштоо керек болчу. Бул аракет ишке ашса системанын калган  $N-1$  теңдемелерин интегралдоонун зарылдыгы жоголот, анткени калган бардык  $n$ -бөлүкчөлүк бөлүштүрүү функциялары  $F_N(x_1, \dots, x_N, t)$  функциясы табылгандан кийин (9.4.4)-формулаларынын жардамында

оной эле аныкталышы мүмкүн. Бирок, жогоруда белгилегендей, Лиувиллдин теңдемелерин интегралдоо иш жүзүндө аткарылбай турган татаал маселе.

Мына ошентип, Боголюбовдун теңдемелер системасын чечүүнүн физикалык туура методу эсептөөнү акыркы,  $F_N$  функциясы үчүн жазылган теңдемеден эмес, эң биринчи  $F_1$  функциясы үчүн теңдемеден баштап жана бул системаны кайсы бир жол менен «үзүүгө» аракет кылууда турат. Эгерде кайсы бир  $F_{n+1}$  функциясын  $F_l$  функциясынан ( $l \leq n$ ) функционал катары туюнтууга мүмкүн болсо, анда (9.4.7)-системаны «үзүүгө» болот жана, биз, чектүү сандагы теңдемелерден турган системага келебиз. Жекече учурда, эгерде тигил же бул жол менен  $F_2(x_1, x_2, t)$  функциясын  $F_1(x_1, t)$  дан функционал катары туюнта алсак, анда  $F_1(x_1, t)$  функциясы үчүн, *кинетикалык теңдеме* деп аталуучу, бир бөлүкчөлүк теңдемеге ээ болобуз.

Больцмандын теңдемеси жана Фоккер-Планктын теңдемеси кинетикалык теңдемелердин жекече учурлары болуп саналышат. Бир бөлүкчөлүк  $F_1(x_1, t)$  жана эки бөлүкчөлүк  $F_2(x_1, x_2, t)$  функцияларына өзгөчө көңүл бурушубуздун себеби төмөнкүдөй. Бир бөлүкчөлүк функциялар аркылуу газодинамикалык сүрөттөө үчүн маанилүү болушкан төмөнкү чоңдуктар туюнтулушу мүмкүн: бөлүкчөлөрдүн санынын орточо тыгыздыгы  $n(\vec{r}, t)$ , бөлүкчөлөрдүн агымынын орточо ылдамдыгы  $\vec{u}(\vec{r}, t)$ , орточо кинетикалык энергия  $\frac{3}{2}kT(\vec{r}, t)$

$$n(\vec{r}, t) = \frac{N}{V} \int d^3 \mathcal{G} F_1(\vec{r}, \vec{\mathcal{G}}, t), \quad 9.4.8.$$

$$n(\vec{r}, t) \vec{u}(\vec{r}, t) = \frac{N}{V} \int d^3 \mathcal{G} \vec{\mathcal{G}} F_1(\vec{r}, \vec{\mathcal{G}}, t) \quad 9.4.9.$$

$$n(\vec{r}, t) \varepsilon(\vec{r}, t) = \frac{3}{2} n(\vec{r}, t) kT(\vec{r}, t) = \frac{N}{V} \int d^3 \mathcal{G} \frac{m \mathcal{G}^2}{2} F_1(\vec{r}, \vec{\mathcal{G}}, t) \quad 9.4.10.$$

Илешимдүү күчтөрдүн тензору, жылуулуктун агымы сыяктуу ж.б. бир топ газодинамика үчүн маанилүү чоңдуктар да бир бөлүкчөлүк бөлүштүрүү функциялары аркылуу туюнтулушат. Эки бөлүкчөлүк бөлүштүрүү функциясы системанын тең салмактуу абалы үчүн өзгөчө чоң мааниге ээ. Тең салмактуулук абалында ал функция, флуктуация теориясында жана фазалык өтүүлөрдүн теориясында зор мааниге ээ болушкан бөлүкчөлөрдүн абалдарынын ортосундагы корреляцияны сүрөттөйт.

Аягында, (9.4.7) -теңдемелер системасы Лиувиллдин теңдемесине толук эквиваленттүү, демек, (9.4.7)-теңдемелер системасы да, статистикалык эмес, механикалык теңдемелердин системасы болушарын белгилей кетмекчибиз. Ошондуктан бул система, Лиувиллдин теңдемеси сыяктуу эле, убакыттын чагылуусуна, б.а.  $t$  ны

$-t$  га алмаштырууга карата инварианттуу болот жана кайрылбас макроскопиялык процесстерди сүрөттөй албайт. Кайрылбастык шарты теориянын формализмине накта ыктымалдуу мүнөзгө ээ болгон айрым гипотезалар аркылуу гана киргизилет.

$F_1$  жана  $F_2$  үчүн теңдемелерди айкын түрдө жазып алалы. (9.4.7)-теңдемеге кирүүчү  $N-n$  көбөйтүндүсүндөгү  $n=1,2$  кошулуучуларын алып таштайбыз.

$$\frac{\partial F_1(x_1, t)}{\partial t} + \bar{\mathcal{E}}_1 F_1(x_1, t) = -\frac{1}{\omega} \int \bar{w}_{12} \frac{\partial F_2(x_1, x_2, t)}{\partial \bar{g}_1} dx_2, \quad 9.4.11.$$

$$\frac{\partial F_2(x_1, x_2, t)}{\partial t} + \bar{\mathcal{E}}_2 F_2(x_1, x_2, t) = -\frac{1}{\omega} \int \left[ \bar{w}_{13} \frac{\partial F_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial \bar{g}_1} + \bar{w}_{23} \frac{\partial F_3(x_1, x_2, x_3, t)}{\partial \bar{g}_2} \right] dx_3, \quad 9.4.12.$$

мында  $\omega = V / N$ ,

$$\bar{\mathcal{E}}_1 = \bar{g}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{r}_1}, \quad 9.4.13.$$

$$\bar{\mathcal{E}}_2 = \bar{g}_1 \frac{\partial}{\partial \bar{r}_1} + \bar{g}_2 \frac{\partial}{\partial \bar{r}_2} + \bar{w}_{12} \frac{\partial}{\partial \bar{g}_1} + \bar{w}_{21} \frac{\partial}{\partial \bar{g}_2}. \quad 9.4.14.$$

## 9.6. Тең салмаксыз системанын эволюциясы

Тең салмаксыз системанын абалынын өзгөрүшүн анын өзгөчөлүктөрүнө жараша айрым этаптарга бөлүп кароо ар бир этапка өзүнчө усулду колдонууга, натыйжада татаал процессти изилдөөнү бир кыйла жеңилдетүүгө мүмкүнчүлүк түзөт.

Газды

$$\frac{r_0^3}{\omega} \sim \frac{r_0}{\lambda} \ll 1 \quad 9.5.1.$$

шартын канаатандыргандай даражада сейректелген болсун дейли, мында  $r_0$  – аракеттенишүү радиусу,  $\lambda$  – эркин жол узундугу. (9.4.7)-теңдемелердин оң тарабындагы мүчөлөрдүн тартиби  $r_0^3 / \omega$  га чамалуу, анткени интеграл астындагы функцияга  $\bar{w}_{i, n+1} = -\partial u(r_{i, n+1}) / \partial \bar{r}_i$  көбөйтүүчү катары киргендиктен координаттар боюнча интегралдоо ( $\sim r_0^3$ ) көлөм боюнча жүргүзүлөт.

Ошондой болсо да (9.4.7)-теңдемелер системасын чечүү үчүн аны  $r_0^3 / \omega$  кичине параметри боюнча катарга ажыратуу жетишсиздик кылат. Мунун себебин түшүнүү үчүн мүнөздүү үч убакытты киргизели: кагылышуулардын эффективдүү узактыгы  $\tau_0 \sim r_0 / \bar{g}$ , удаалаш кагылышуулардын арасындагы орточо убакыт  $\tau$ :

$$\tau \sim \frac{\lambda}{\bar{g}} \sim \frac{\omega}{r_0^3} \frac{r_0}{\bar{g}} \gg \tau_0,$$

жана түрдүү физикалык маселелерде түрдүүчө, бирок, эреже катары,  $\tau$  дан бир канча эсе чоң, макроскопиялык релаксация убактысы  $T^*$ .



Акыркы шарт газ  $\lambda \gg r_0$  шарты орундалгандай жетишээрлик сейректелген, бирок, ошол эле учурда  $\lambda < L$  ( $L$  – идиштин өлчөмү) болгондой тыгыз дегенди билдирет.  $\lambda > L$  болгон учурда молекулалар бири-бири менен эмес, идиштин дубалдары менен гана кагылышышат, б.а. кнудсендик газды алган болобуз. Бул учурду биз карабайбыз.

Ошентип, биз

$$r_0 \ll \lambda < L, \quad \tau_0 \ll \tau < T^* \quad 9.5.2.$$

барабарсыздыгына ээ болдук.

$F_1$  функциясынын убакыттын өтүшү менен өзгөрүшүн сүрөттөөчү (9.4.11) – теңдемесинен  $r_0^3 / \omega$  параметри боюнча нөлдүк жакындаштырууда бул теңдеме молекулалардын өз ара аракеттенишүү күчтөрүнүн  $u(r_{ik})$  потенциалын камтыбай турганын көрүүгө болот. Бул  $\tau_0$  тартибиндеги убакыттын ичинде  $F_1$  функциясы молекулалардын өз ара аракеттенишүүлөрүнүн (кагылышууларынын) эсебинен сезилерлик өзгөрүүгө дуушар болбойт, ошондуктан жакындаштырып турактуу деп эсептелиши мүмкүн дегенди билдирет. Бирок, (9.4.11) – теңдеменин оң тарабындагы түзөтүүчү мүчөнү анализдөө  $\tau$  тартибиндеги убакыт ичинде  $F_1$  функциясынын өзгөрүүлөрү эми кыйла чоң маанилерге жетерин жана  $r_0^3 / \omega$  нын даражасы боюнча катарга ажыратуу жетишерлик болбой каларын көрсөтөт.

Буга тескерисинче,  $F_2$  нин убакыт боюнча эволюциясын сүрөттөөчү (9.4.12) теңдемеси (жана  $n \geq 2$  кезиндеги бардык эле (9.4.7) – теңдемелери)  $r_0^3 / \omega$  параметри боюнча нөлдүк жакындаштырууда эле молекулалар аралык күчтөрдүн потенциалын камтыйт. Ал Лиувилдин  $\mathcal{E}_n$  операторунун  $\bar{w}_{ik} (\partial F_n / \partial \bar{q}_i)$  кошулуучуларына кирет да  $\tau_0$  го чамалуу убакыттын ичинде  $F_2, F_3, \dots$  функцияларынын «тез» өзгөрүүлөрүнө алып келет. Бирок,  $t \geq \tau$  кездердеги өзгөрүүлөрдү гана эсепке алуучу убакыттын «одоно» шкаласында  $F_n$  функцияларынын бул тез өзгөрүүлөрү орточолошуп «жылмаланып» кетип, алардын жай эволюциялары гана калат. Ошондуктан көп бөлүкчөлүк функциялардын  $\tau_0$  убактысынын ичиндеги тез хаотизацияланган алгачкы этабынан кийинки жай эволюциясы толугу менен бир бөлүкчөлүк  $F_1(x_1, t)$  функциясынын эволюциясы аркылуу аныкталат деп эсептөө чындыкка жакын болчудай. Чындыгында эле, системада бир нече кагылышуу болуп өткөндөн кийин молекулалардын тартиби «жалпыланып», окшош болуп калат да, бир бөлүкчөлүк функция система тууралуу жетишерлик толук маалымат бере алат.

Мына ошентип, ситеманын алгачкы тең салмаксыз абалы бир катар этаптарды өтүү аркылуу эволюцияланат.

1.  $t \sim \tau_0$ . *Алгачкы хаотизация этабы*. Бул этапта системанын абалы, жалпы учурда, толук N-бөлүкчөлүк  $F_N(x_1, \dots, x_N, t)$  бөлүштүрүү функциясы аркылуу гана сүрөттөлүшү мүмкүн. Чындыгында эле, молекулалардын координаттары жана ылдамдыктары боюнча орточолоштурууну билдирүүчү бир бөлүкчөлүк, эки бөлүкчөлүк жана жалпы эле n-бөлүкчөлүк бөлүштүрүү функциясына өтүү (9.4.4-тө – интегралдоо) абалдын учурдагы мүнөзү жөнүндөгү маалыматты жок кылат. Мисалы, эгерде баштапкы абал ылдамдыктары Максвеллдин бөлүштүрүүсүнө баш ийген муздак газга тез кыймылдаган молекулалардын тобун киргизүү жолу менен түзүлгөн болсо, анда ылдамдыктар жана координаттар боюнча интегралдоо газда молекулалардын «ыссык» жана «муздак» эки тобунун бар экендиги жөнүндөгү маанилүү жалгыз маалыматты «өчүрөт».

2.  $\tau_0 \ll t \leq \tau$ . Бул этапты Боголюбов *кинетикалык* деп атаган, бул этапта газды мүнөздөө үчүн бир бөлүкчөлүк бөлүштүрүү функциясын билүү жетиштүү. Бирок, кээ бир назик суроолорду чечүү, мисалы, абалдын теңдемесин табуу үчүн абалдын эки бөлүкчөлүк функциясын да билүү керек болот.

3.  $\tau < t$ . Бул этап *гидродинамикалык* деп аталат жана ал бир нече кагылышуу болуп өткөндөн кийин бул этапта газдын көлөмүнүн кичине бөлүктөрүндө *локалдык тең салмактуулуктун* орношу менен мүнөздөлөт. Мындай, тең салмактуулукка жакын, абалдарда системаны сүрөттөө үчүн бир бөлүкчөлүк бөлүштүрүү функциясын деле билүүнүн кереги жок,  $f(\vec{r}, \vec{\vartheta}, t)$  функциясынын бир нече биринчи моменттерин билүү жетиштүү болот.

$F$  функциясынын моменттери деп  $f(\vec{r}, \vec{\vartheta}, t)$  функциясынын ылдамдыктардын мейкиндиги боюнча интегралдарын айтабыз. Мисалы, нөлдүк момент

$$\int d^3 \mathcal{G} f(\vec{r}, \vec{\vartheta}, t)$$

бөлүкчөлөрдүн санынын мейкиндиктик тыгыздыгы  $n(\vec{r}, t)$  ны (концентрациясын) аныктайт, ал эми биринчи момент

$$\int d^3 \mathcal{G} \vec{\vartheta}_i f(\vec{r}, \vec{\vartheta}, t) = n(\vec{r}, t) u_i(\vec{r}, t)$$

орточо макроскопиялык ылдамдыкты аныктайт, ж.б.д.у.с.

Боголюбов эволюциянын кинетикалык стадиясын терең изилдеп, тиешелүү жакындаштырууларды киргизүү менен сырткы талаада жайгашпаган мейкиндиктик бир тектүү система үчүн Больцмандын кинетикалык теңдемесин келтирип чыгарууга болорун көрсөткөн.

## 9.6. Боголюбовдун теңдемелеринин чен бирдиксиз формасы. Факторлоштуруу жана корреляциялык функциялар

Боголюбовдун теңдемелер системасын интегралдоонун айрым жакындаштырылган методдорун карап көрөлү. Бул методдор төмөнкү эки учурда - өтө сейректелген газдарда жана газдын бөлүкчөлөрүнүн бири-бири менен аракеттенишүүсү өтө начар болгон кезде бир бөлүкчөнүн калган бөлүкчөлөрдүн абалына таасири да өтө начар болушу керек экендигине негизделишет. Мындай учурларда нөлдүк жакындаштырууда  $n$ -бөлүкчөлүк бөлүштүрүү функциясы *факторлошот*, б.а. бир бөлүкчөлүк функциялардын көбөйтүндүсү түрүндө берилиши мүмкүн деп эсептөөгө болот:

$$F_n^{(0)}(x_1, \dots, x_n, t) = \prod_{i=1}^n F_1(x_i, t) \quad . \quad 9.6.1.$$

Так  $n$ -бөлүкчөлүк функциянын нөлдүк жакындаштырууда факторлоштурулган функциядан айырмаланышын (четтөөсүн)  $G_n(x_1, \dots, x_n, t)$  *корреляциялык функцияларынын* жардамында мүнөздөө кабыл алынган. Алар төмөнкү схема боюнча табылат.

Эки бөлүкчөлүк функция үчүн

$$F_2^{(0)}(x_1, x_2, t) = F_1(x_1, t)F_1(x_2, t), \quad 9.6.2.$$

$$F_2(x_1, x_2, t) = F_2^{(0)}(x_1, x_2, t) + G_2(x_1, x_2, t). \quad 9.6.3.$$

Үч бөлүкчөлүк функция үчүн

$$F_3^{(0)}(x_1, x_2, x_3, t) = F_1(x_1, t)F_1(x_2, t)F_1(x_3, t), \quad 9.6.4.$$

$$F_3(x_1, x_2, x_3, t) = F_3^{(0)}(x_1, x_2, x_3, t) + F_1(x_1, t)G_2(x_2, x_3, t) + F_1(x_2, t)G_2(x_3, x_1, t) + F_1(x_3, t)G_2(x_1, x_2, t) + G_3(x_1, x_2, x_3, t) \quad 9.6.5.$$

ж.б.д.у.с.

Эми газдын сейректелгендигинин жана аракеттенишүүнүн начардыгынын шартын сандык түрдө туюнталы.  $r_0$  – молекулалар аралык күчтөрдүн аракет этүү радиусу жана  $u_0$  – аракеттенишүүнүн потенциалдык энергиясынын мүнөздүү чоңдугу болсун дейли. Эгерде  $r_0$  бөлүкчөлөрдүн арасындагы ( $\omega^{1/3}$ ) орточо аралыктан бир кыйла кичине болсо газ сейректелген дейбиз, демек, бул учурда маселенин кичине параметри катары  $\alpha = r_0^3 / \omega = nr_0^3$  чоңдугун эсептөөгө болот. Аракеттенишүүнүн начардыгы потенциалдык энергиянын кинетикалык ( $\sim kT$ ) энергияга караганда аз болушунан байкалат. Демек, бул учурда маселенин кичине параметри болуп  $\beta = u_0 / kT$  чоңдугу кызмат кылат.

Айталы, жогоруда сөз болгон эки учурда тең бөлүкчөлөрдүн координаттары менен ылдамдыктарынын ортосундагы корреляция

начар жана  $G_n(x_1, \dots, x_n, t)$  корреляциялык функциялары тиешелүү  $\alpha$  жана  $\beta$  параметрлери боюнча кичине болсун дейли. Ушул айтылгандардын чегинде Боголюбовдун теңдемелер системасын чечүүнүн методдорун тургузуу үчүн (9.4.7) системаны, андагы  $\mathcal{E}_n = \mathcal{K}_n + \mathcal{V}_n$  операторунда аракеттенишүү потенциалын камтыган жана камтыбаган кошулуучуларын ажыратып, деталдаштырылган түрдө жазып алалы:

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} + (\mathcal{K}_n + \mathcal{V}_n)F_n = \frac{N-n}{V} \mathcal{A}_n F_{n+1}, \quad 9.6.6.$$

мында

$$\mathcal{K}_n = \sum_{i=1}^n \bar{\mathcal{G}}_i \frac{\partial}{\partial \bar{r}_i}, \quad 9.6.7.$$

$$\mathcal{V}_n = \sum_{i=1}^n \bar{w}_{ik} \frac{\partial}{\partial \bar{g}_i} \quad 9.6.8.$$

$$\mathcal{A}_n = - \sum_{i=1}^n \int dx_{n+1} \bar{w}_{i,n+1} \frac{\partial}{\partial \bar{g}_i}. \quad 9.6.9.$$

(9.6.6)-теңдемелерде чен бирдиксиз өзгөрүлмөлөргө өтөлү. Ал үчүн узундуктун бирдиги катары  $r_0$ ду, ылдамдыктын бирдигине  $\sqrt{kT/m}$  ди, ылдамдануунун бирдигине  $u_0/mr_0$  ду жана убакыттын бирдигине  $r_0\sqrt{m/kT}$  ны тандап алалы. Жөнөкөй болсун үчүн чен бирдиксиз өзгөрүлмөлөргө жаңы белгилөөлөрдү колдонбой эле, (9.6.6) теңдемелерде төмөнкүдөй алмаштырууларды жүргүзөлү:

$$\begin{aligned} \bar{r}_i &\rightarrow \bar{r}_i r_0, & \bar{\mathcal{G}}_i &= \bar{\mathcal{G}}_i \sqrt{\frac{kT}{m}} \\ \bar{w}_{ik} &\rightarrow \bar{w}_{ik} \frac{u_0}{mr_0}, & t &\rightarrow tr_0 \sqrt{\frac{m}{kT}}. \end{aligned} \quad 9.6.10.$$

$F_n(x_1, \dots, x_n, t)$  – функцияларынын (9.4.5) нормалаштыруу шартынан  $F_n \mathcal{G}^{-3n} = (m/kT)^{3n/2}$  чен бирдигине ээ болорун көрөбүз. Ошондуктан төмөнкүдөй

$$F_n \rightarrow F_n \left(\frac{m}{kT}\right)^{3n/2} \quad 9.6.11.$$

алмаштыруу аркылуу чен бирдиксиз бөлүштүрүү функциясын киргизип алабыз. Анда (9.6.6) Боголюбовдун теңдемелери  $n \ll N$  учуру үчүн

$$\frac{\partial F_n}{\partial t} + (\mathcal{K}_n + \beta \mathcal{V}_n)F_n = \alpha \beta \mathcal{A}_n F_{n+1} \quad 9.6.12.$$

көрүнүшүндө жазылат.

$F_n$  функциялары нөлдүк жакындаштырууда факторлошот, б.а.  $F_n^{(0)} = F_1(x_1, t)F_1(x_2, t)\dots F_1(x_n, t)$  деп эсептөө менен биз бир эле  $F_1(x_1, t)$  функциясы үчүн  $N$  теңдемеге ээ болорубузду белгилей кетели. Факторлоштуруу мүмкүндүгүнүн зарыл шарты болуп нөлдүк жакындаштыруунун бул теңдемелеринин өз ара шайкештиги (совместность) эсептелет.

Сейректелген ( $\alpha = r_0^3 / \omega \ll 1$ ) газ үчүн  $\beta = u_0 / kT \geq 1$  учуру нөлдүк жакындаштырууда бири-бирин канааттандырбаган теңдемелер системасына алып келет. Бул системанын теңдемелери бөлүкчөлөр өз ара аракеттенишпеген ( $w_{ik} = 0$ ) учурда гана өз ара шайкеш болушат. Демек, сейректелген газдарда корреляцияларды нөлдүк жакындаштырууда да эсепке алууга туура келет. Сейректелген газдар үчүн «жакшы» кинетикалык теңдеме болуп факторлоштуруу талабын канааттандырбай турган Больцмандын теңдемеси эсептелерин эске алсак жогорудагы жагдайды туура түшүнүүгө болот.

Бөлүкчөлөрү өз ара начар аракеттенишүүчү, бирок жетишерлик тыгыз ыссык газ ( $\beta = u_0 / kT \ll 1$ ,  $\alpha = r_0^3 / \omega \leq 1$ ) учурунда нөлдүк жакындаштыруу бири-бирине чиркелип уланбаган теңдемелерди берет. Демек, көп бөлүкчөлүк  $F_n(x_1, \dots, x_n, t)$  функциясын факторлоштуруп, бир бөлүкчөлүк  $F_1(x_i, t)$  функцияларынын көбөйтүндүсү аркылуу туюнтуу менен маселени жеңилдетип чечүүгө болот.

$F_n$  функцияларынын кийинки жакындаштыруулардагы теңдемелерин чечүү аркылуу  $F_1$ ди,  $G_2$ ни, демек,  $F_2$ ни ж.б.д.у.с. удаалаш табууга болот.

## 9.7. Өз ара жуурулушкан талаа жакындаштыруусу жана Власовдун кинетикалык теңдемеси

$\beta$  параметри кичине ( $\beta = u_0 / kT \ll 1$ ) болгондой температура жетишерлик жогору, бирок күчтөрү алыска аракет этүүчү жана  $\alpha = r_0^3 / \omega \leq 1$  болгон учур үчүн (9.6.12)-теңдемелерди колдонуп көрөлү.  $\alpha\beta = u_0 r_0^3 / \omega kT$  көбөйтүндүсү бирдин тартибинде деп эсептейли. Бул учур практикада өтө маанилүү, анткени ал - бөлүкчөлөрдүн кагылышууларын эске албай коюуга мүмкүн болгон, бирок күчтөрдүн алыска аракет этүүчү мүнөзүн эсепке алуу керек болгон *ыссык плазманын* тартибин түшүндүрүүгө мүмкүндүк берет. Бул учурда  $r_0$  параметри дебайдык радиустун маанисин аларын көрүүгө болот. Чындыгында эле,  $u_0 \sim e^2 / r_0$  деп эсептеп жана  $\alpha\beta = e^2 r_0^2 n / kT \approx 1$ ге барабарлап,  $r_0 \sim \sqrt{kT / ne^2} \sim r_D$  ны алабыз.

$n$  канчалык чоң болсо  $G_n(x_1, \dots, x_n, t)$  корреляциялык функциялары  $\beta \ll 1$  параметри боюнча ошончолук жогору даражада кичине болот деген чындыкка окшогон, бирок так далилденбеген интуитивдүү божомолдон пайдаланабыз. Анда  $\beta$  параметри боюнча нөлдүк тартипте Боголюбовдун (9.6.12)- теңдемелерин

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{K}_1\right)F_1(x_1, t) &= \alpha\beta\mathcal{A}_1 F_1(x_1, t)F_1(x_2, t), \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{K}_2\right)F_1(x_1, t)F_1(x_2, t) &= \alpha\beta\mathcal{A}_2 F_1(x_1, t)F_1(x_2, t)F_1(x_3, t), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{K}_n\right)\prod_{i=1}^n F_i(x_i, t) = \alpha\beta\mathcal{A}_n \prod_{i=1}^{n+1} F_i(x_i, t) \quad 9.7.1.$$

көрүнүшүндө жазууга болот.

$\mathcal{K}_n$  жана  $\mathcal{A}_n$  операторлорунун аддитивдүүлүгүнүн негизинде (9.7.1)-теңдемелер системасы өз ара жуурулушкандыгын (самосогласована) көрүү анча кыйын эмес: бул системанын каалаган теңдемесиндеги өзгөрүлмөлөрдү ажыратуу  $F_1$  функциясы үчүн бир эле теңдемеге, тактап айтканда, биринчи теңдемеге алып келет, жана, тескерисинче, (9.7.1)-системанын биринчи теңдемесин канааттандыруучу  $F_1$  функциясы, ошол эле учурда бул системанын каалаган башка теңдемелерин да автоматтык түрдө канааттандырат.

Мына ошентип, кайрадан чен бирдиктүү өзгөрүлмөлөргө кайтып жана  $f(\vec{r}, \vec{g}, t)$  функциясына өтүү менен

$$\frac{\partial f(x_1, t)}{\partial t} + \vec{g}_1 \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial \vec{r}} + \frac{\partial}{\partial \vec{g}_1} \int dx_2 \vec{w}_{12} f(x_1, t) f(x_2, t) = 0 \quad 9.7.2.$$

теңдемесине ээ болобуз.

Биринчи жана экинчи бөлүкчөлөрдүн өз аракеттенишүү күчүн  $\vec{\mathfrak{Z}}(\vec{r})$ ди киргизели да аны экинчи бөлүкчөнүн абалдары боюнча орточолоштуралы:

$$\vec{\mathfrak{Z}}(\vec{r}_1) = m \int d^3 r_2 \vec{w}_{12} n(\vec{r}_2) = m \int \int d^3 r_2 d^3 \mathcal{G}_2 \vec{w}_{12} f(x_2, t) \quad 9.7.3.$$

Анда (9.7.2)-теңдеме башкача формада, төмөнкүдөй көрүнүштө жазылат:

$$\frac{\partial f(x_1, t)}{\partial t} + \vec{g}_1 \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial \vec{r}} + \vec{\mathfrak{Z}}(\vec{r}_1) \frac{\partial f(x_1, t)}{\partial p_1} = 0 \quad 9.7.4.$$

Бул теңдеме формасы боюнча берилген сырткы  $\vec{\mathfrak{Z}}(\vec{r}_1)$  күчүнүн аракети менен кыймылдаган бөлүкчө үчүн Лиувилдин бир бөлүкчөлүк теңдемесине же, б.а. Больцмандын кагылышууларды эсепке алган мүчөсү катышпаган теңдемесине дал келет. Бирок (9.7.4)-теңдемедеги «сырткы күч»  $\vec{\mathfrak{Z}}(\vec{r}_1)$  берилген эмес, ал  $f(\vec{r}, \vec{g}, t)$  дан (9.7.3)-формула боюнча аныкталуучу функционал экендиги менен принципиалдуу айырмаланып турат. Ошондуктан **А.А.Власовдун теңдемеси** деп аталган (9.7.4)-теңдеме бөлүкчөнүн  $\mu$ -мейкиндигиндеги өз ара жуурулушкан кыймылын сүрөттөйт. Власовдун теңдемелеринин өз ара жуурулушкандыгы төмөнкүлөрдөн байкалууга тийиш:  $\vec{\mathfrak{Z}}(\vec{r}_1)$  күчүн каалагандай эркин берилген деп эсептеген учурда (9.7.4)-теңдеменин чечими катары табылган  $f(\vec{r}, \vec{g}, t)$  функциясы (9.7.3) формулада ошол эле  $\vec{\mathfrak{Z}}(\vec{r}_1)$  дин маанисине алып келиши керек. Тескерисинче, эгерде  $f(\vec{r}, \vec{g}, t)$

функциясын белгилүү деп эсептеп (9.7.3)-формула боюнча  $\vec{\mathfrak{z}}(\vec{r}_1)$  күчтү тапсак, анда (9.7.4)-теңдемени чечүү менен биз кайрадан баштапкы  $f(\vec{r}, \vec{\mathfrak{g}}, t)$ -функциясын алышыбыз зарыл.

Л.Д.Ландау бул (9.7.4)-теңдемени сырткы талаа аракет этпеген электрондук плазманын термелүүлөрү жөнүндөгү маселеге колдонуп, биринчи жолу туура чечимге жетишкен. Бул термелүүлөр бөлүкчөлөрдүн баш аламан кыймылынын натыйжасында плазманын айрым бөлүктөрүндө нейтралдуулуктун локалдык бузулушунун эсебинен пайда болушат. Плазмадагы иондордун массасы электрондун массасына салыштырганда өтө эле чоң болгондуктан, нөлдүк жакындаштырууда, электрондордун гана кыймылын кароого болот.

Андан сырткары, магниттик эффекттердин салыштырмалуу ролу  $\sim \mathfrak{g}/c$  га пропорциялаш болгондуктан, магниттик талааны да жок деп эсептеп, бир гана электр талаасы каралат.

Анда (9.7.4)-теңдеме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{\mathfrak{g}} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{g}} = 0 \quad 9.7.5.$$

көрүнүшүндө жазылат, ал эми системаны «жуурулуштуруучу» теңдеменин ролун Пуассондун

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi e \int f d^3 \mathfrak{g} \quad 9.7.6.$$

теңдемеси аткарат.

$f$  функциясын

$$f = f_0(\mathfrak{g}) + F(\vec{r}, \vec{\mathfrak{g}}, t) \quad 9.7.7.$$

көрүнүшүндө жазып, (9.7.5)-теңдемени сызыктуу түргө келтирели, мында  $f_0(\mathfrak{g})$  – тең салмактуу (максвеллдик) бөлүштүрүү функциясы, ал эми  $F(\vec{r}, \vec{\mathfrak{g}}, t)$   $f_0$  го салыштырганда кичине болгон түзөтүүчү.

$F$  үчүн теңдеме

$$\frac{\partial F}{\partial t} + \vec{\mathfrak{g}} \frac{\partial F}{\partial \vec{r}} + \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial \vec{r}} \frac{\partial f_0}{\partial \mathfrak{g}} = 0 \quad 9.7.8.$$

көрүнүшүнө ээ, жана электрондордун тең салмактуу заряды  $-e \int f_0 d^3 \mathfrak{g}$  иондордун оң заряды менен компенсацияланарын эске алып Пуассондун (9.7.6)-теңдемесин

$$\nabla^2 \varphi = 4\pi e \int F d^3 \mathfrak{g} \quad 9.7.9.$$

көрүнүшүндө өзгөртүп жазып алууга болот.

Убакыттын баштапкы ( $t=0$ ) моментинде плазмадагы электрондордун кандайдыр бир тең салмаксыз  $F(\vec{r}, \vec{\mathfrak{g}}, 0)$  бөлүштүрүүсү берилген деп эсептеп, маселе бул абалдын андан аркы эволюциясын изилдөөгө келтирилет. Эсептөөлөрдүн айрым натыйжаларын сапаттык түрдө гана санап өтөлү.

Ландаунун эсептөөлөрү, нөлдүк жакындаштырууда, плазмада жыштыгы  $\omega_0 = \sqrt{4\pi n e^2 / m}$  болгон узатасынан кеткен толкундар таралышы

мүмкүн экендигин көрсөттү. Кийинки жакындаштырууда, б.а. плазмадагы толкундун узундугу дебайдык радиустан бир кыйла чоң болгон учур үчүн, узатасынан кеткен толкундардын дисперсиясын түшүндүрүүчү жана алардын группалык ылдамдыктарын табууга мүмкүндүк берүүчү туюнтма алынды.

Тагыраак изилдөөлөрдүн натыйжасында жетишерлик начар талааларда, б.а. толкун узундугунчалык аралыктарда электрон толкундун эсебинен алган энергия анын орточо жылуулук энергиясынан кичине болгон учурларда, узатасынан кетүүчү толкундардын басаңдоосу (*Ландаунун өчүүсү*) мүмкүн экендиги көрсөтүлдү.

Мына ошентип, Ландау плазма үчүн кинетикалык теңдемени, бөлүкчөлөрдүн ортосундагы кагылышууларды эсепке албай эле, өз ара жуурулушкан талаа жакындаштыруусунун чегинде жазып, бир топ маанилүү кубулуштарды түшүндүрүүгө жетише алды. Бөлүкчөлөрдүн өз ара кагылышуулары менен шартталган эффекттерди изилдөө үчүн Ландау Больцмандын теңдемесиндеги кагылышуулардын интегралын шартка жараша өзгөртүп түзүп плазма үчүн тиешелүү кинетикалык теңдемени алууга жетишти.

## **9.8. Больцмандын кинетикалык теңдемесин чечүүнүн жакындаштырылган методдору**

Больцмандын кинетикалык теңдемеси практикалык маселелерди изилдөөдө кеңири колдонулат. Мисалы, ал диффузия, жылуулук өткөрүмдүүлүк, турбуленттүүлүк сыяктуу көптөгөн кубулуштарды түшүндүрүүдө пайдаланылат. Алсак, тең салмаксыз системанын эволюциясынын гидродинамикалык стадиясын изилдөөгө Больцмандын теңдемесин аны чечпей туруп эле колдонуп жана газдын абалы бөлүштүрүү функциясынын бир нече алгачкы моменттеринин жардамында жакшы сүрөттөлөт деп эсептеп, классикалык газодинамиканын теңдемелерин жалпы түрдө келтирип чыгарууга болот.

Ташуу кубулуштарынын феноменологиялык теңдемелерин негиздөө жана ташуу коэффициенттерин эсептөө үчүн Больцмандын теңдемелерин, жакындаштырып болсо да, чечүү зарыл.

Больцмандын теңдемелерин жакындаштырып чечүүнүн бир нече методдору - мисалы Энског-Чепмендин методу, Граддын моменттик методу ж.б. белгилүү. Алардын бардыгы өтө татаал жана узун эсептөөлөрдү талап кылат, ошондуктан аларды толук келтирүүгө мүмкүнчүлүгүбүз жок. Теңдемени чечүүдөгү кыйынчылыктардын



көпчүлүгү кинетикалык теңдеменин оң тарабындагы кагылышуулардын интегралын эсептөө менен байланышкан.

Өзгөчө жогору тактыкты талап кылбаган көпчүлүк практикалык маанилүү маселелерде *релаксация убактысы жакындаштыруусу* деп аталган методду пайдаланышат.

Сырткы күч таасир этпеген жана мейкиндикте бир калыпта бөлүштүрүлгөн, бирок бөлүкчөлөрүнүн ылдамдыктары боюнча тең салмактуулук орной элек газ үчүн кинетикалык теңдеме

$$\frac{\partial f}{\partial t} = I(t) = \int \int (\tilde{f}f^1 - ff^1) q d\sigma d^3 \mathcal{G}^1 \quad 9.8.1.$$

көрүнүшүндө жазылат. Локалдык тең салмактуулукка жакын учурлар үчүн анын чечими

$$f = f_0(1 + \varphi), \quad |\varphi| \ll 1 \quad 9.8.2.$$

көрүнүшүндө изделет, мында,  $f_0$  – локалдык тең салмактуу бөлүштүрүү функциясы. Системанын релаксация убактысын  $\tau$  менен белгилеп жана өз эркинче коюлган системанын тең салмактуулук абалына өтүүсү молекулалардын бири-бири менен көптөгөн кагылышуулары аркылуу ишке ашырылат деп эсептеп (9.8.1)-теңдемени жакындаштырып

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{f - f_0}{\tau} \quad 9.8.3.$$

көрүнүшүндө жазып алууга болот.

$\frac{\partial f_0}{\partial t} = 0$  болорун эске алып, теңдемени

$$\frac{d(f - f_0)}{dt} = -\frac{f - f_0}{\tau}$$

көрүнүшүндө жазалы. Бул теңдеменин чечими

$$f - f_0 = g(\bar{\mathcal{G}}) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad 9.8.4.$$

функциясы түрүндө болот. Мындагы  $g(\bar{\mathcal{G}})$  – функциясы баштапкы шарттардан аныкталат. Акыркы формула  $\tau$  нын релаксация убактысы катары талкууланышын ырастап турат.

Сандык эсептөөлөр жана эксперимент молекулалардын ылдамдыктары боюнча тең салмактуулугу өтө тез, бир нече кагылышуулардан кийин эле орной тургандыгын көрсөтөт. Ошондуктан  $\tau$  тартиби боюнча эркин жол узактыгынан бир нече эсе чоң. Көпчүлүк учурларда  $\tau$  нун ылдамдыктан көз карандылыгын эске албай эле, болжолдуу эсептөөлөр үчүн аны эркин жол узактыгынын орточо маанисине барабар деп алууга болот.

Больцмандын (9.8.3)-көрүнүшүндөгү теңдемесин көпчүлүк учурларда, так негиздөөсүз эле, сырткы күчтөр аракет эткен жана мейкиндикте бир калыпта бөлүштүрүлбөгөн газдар үчүн да колдонушат. Бул учурда релаксация убактысы жакындаштыруусундагы же,  $\tau$  – жакындаштыруудагы теңдеме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{G}_k \frac{\partial f}{\partial x_k} + \frac{F_k}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathcal{G}_k} = -\frac{f-f_0}{\tau} \quad 9.8.5.$$

көрүнүшүндө жазылат.

Акыркы жылдары кинетикалык маселелерди чечүүнүн кинетикалык теңдемелерди колдонбой, түздөн-түз *тыгыздыктын матрицасынын* теңдемесин пайдаланууга негизделген өтө натыйжалуу кванттык-механикалык методу Кубо тарабынан сунушталып, өнүктүрүлүп келет.

## 9.9. H-теорема жана Максвелл-Больцмандын бөлүштүрүүсү

Больцмандын кинетикалык теңдемесин пайдаланып физикалык чоңдуктардын орточо маанилеринин мейкиндикте жана убакыттын өтүшү менен өзгөрүшүнө тиешелүү айрым маанилүү натыйжаларды келтирип чыгарууга аракет кылып көрөлү.

Бир атомдуу идеалдуу газдын тең салмактуулугунун шартын Больцмандын кинетикалык (9.3.12) теңдемесинин жардамында төмөнкүдөй түрдө жазууга болот:

$$\vec{\mathcal{G}}_k \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_k} + \vec{w}_k \frac{\partial f}{\partial \mathcal{G}_k} = 0, \quad 9.9.1.$$

$$\int \int (\tilde{f}f^1 - ff^1) q d\sigma(q, \vec{e}) d^3 \mathcal{G}^1 = 0. \quad 9.9.2.$$

Сырткы күчтөр газга аракет этпеген ( $\vec{F} = \vec{w}m = 0$ ) учурда (9.9.1)-теңдемеден

$$\vec{\mathcal{G}}_k \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_k} = 0.$$

Бул барабардык ылдамдыктын каалаган эркин  $\vec{\mathcal{G}}$  мааниси үчүн

$$f = f(\mathcal{G}), \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{x}_k} = 0. \quad 9.9.3.$$

болгондо гана аткарылат.  $\frac{\partial f}{\partial \vec{x}_k} = 0$  шарты молекулалардын системанын көлөмү боюнча бир калыпта бөлүштүрүлүшүн билгизет.

(9.9.2)-шарты

$$\tilde{f}f^1 = ff^1 \quad 9.9.4.$$

болгондо аткарылат. Бул барабардыкты, биз мурда (9.3) тө белгилеп кеткендей, *деталдык тең салмактуулуктун принциби* деп аташат. Ал кагылышуулардын эсебинен фазалык мейкиндиктин  $d\vec{r}d\vec{\mathcal{G}}$  көлөмүнө келип кирген жана андан чыккан молекулалардын агымдарынын барабардыгы тең салмактуулук учурунда интегралдык түрдө, б.а. бардык мүмкүн болгон кагылышуулардын эсебинен гана аткарылбастан, сакталуу закондору жана Лиувилдин теоремасы орундалган ар бир айрым  $d\mathcal{G}d\mathcal{G}^1 \Leftrightarrow d\tilde{\mathcal{G}}d\tilde{\mathcal{G}}^1$  тибиндеги кагылышуулар үчүн

да аткарылышы керек дегенди билдирет. Ошентип, (9.9.4)- шарт тең салмактуулуктун зарыл жана жетишерлик шарты болуп эсептелет.

(9.9.4)- барабардыкты логарифмалайлы:

$$\ln \tilde{f} + \ln \tilde{f}^1 = \ln f + \ln f^1, \quad 9.9.5.$$

Бул шарт  $\ln f$  чоңдугу кагылышууларга карата кыймылдын аддитивдүү интегралы болот дегенди түшүндүрөт. Жуптук серпилгичтүү кагылышуулар үчүн мындай интегралдардан бешөө гана - ылдамдыктын проекциялары  $\mathcal{G}_x, \mathcal{G}_y, \mathcal{G}_z$ , энергия  $\varepsilon = m\mathcal{G}^2/2$  жана ылдамдыктан көз каранды болбогон дагы бир чоңдук белгилүү. Ошондуктан  $\ln f$  кыймылдын бул саналган интегралдарынын сызыктуу гана комбинациясы аркылуу туюнтулушу мүмкүн:

$$\ln f = a + b_i \mathcal{G}_i + c \mathcal{G}_i^2.$$

Мындан

$$f = \exp[a + b_i \mathcal{G}_i + c \mathcal{G}_i^2].$$

Биздин максаттар үчүн бул туюнтманы

$$f = \exp\left[\alpha - \beta \frac{m}{2} (\mathcal{G}_i - u_i)^2\right] \quad 9.9.6.$$

көрүнүшүндө жазган ыңгайлуу. Бул бөлүштүрүүнү ылдамдыктын проекцияларынын орточо маанилери  $\bar{\mathcal{G}}_i = u_i$  болгон Максвеллдин бөлүштүрүүсү катары түшүндүрүүгө болот. (9.9.6)-туюнтмадагы  $\alpha, \beta$  жана  $u_i$  чоңдуктары жалпы учурда координаттын жана убакыттын функциясы, анткени ылдамдыктан жана энергиядан айырмаланып, «кирпик какканчалык» убакыттагы өтө тез кагылышууларда координаталар өзгөрүүгө үлгүрбөйт. Ошондуктан, мейкиндиктин ар бир чекитинде өзүнүн локалдык орточо ылдамдыгы - газдын агымынын жалпы учурда убакыттын өтүшү менен өзгөрүп баруучу ылдамдыгы жашайт.

Локалдык тең салмактуулукту мүнөздөгөндүгүн көрсөтүү үчүн (9.9.6)-функциясын  $f_0$  символу аркылуу белгилеп алалы.

Нормалаштыруу жана газдын жалпы энергиясынын турактуулук шарттарынан

$$e^\alpha = n \left(\frac{m\beta}{2\pi}\right)^{3/2} = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2},$$

локалдык ылдамдыктын проекциясы  $u_i = \bar{\mathcal{G}}_i$  жана  $\beta = \frac{1}{kT}$  болорун көрөбүз. Анда (9.9.6) туюнтмасы

$$f(\mathcal{G}) = f_0(\mathcal{G}) = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{m(\mathcal{G}_i - u_i)^2}{2kT}\right] \quad 9.9.7.$$

көрүнүшүн алат. Бул теңдеме

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathcal{G}_k \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_k} + w_k \frac{\partial f}{\partial \bar{g}_k} = 0 \quad 9.9.8.$$

шартын канааттандырышы зарыл.

Максвеллдин локалдык бөлүштүрүү формуласындагы  $\beta$  же температура - мейкиндиктин бардык чекиттеринде бирдей, бирок убакыттын өтүшү менен өзгөрүшү мүмкүн болгон чоңдук.

Газда эч кандай агым жок болсо ( $\bar{g}_x = \bar{g}_y = \bar{g}_z = u_i = 0$ ) жана ага сырткы талаа аракет этип, молекулалары  $u(\vec{r})$  потенциалдык энергияларына ээ болушса, анда кадимки Максвелл-Больцмандын теңдемесине ээ болобуз:

$$f(\vec{g}, \vec{r}) = f^{(0)}(\vec{g}, \vec{r}) = \text{const} \exp\left[-\beta\left(\frac{m g^2}{2} + u(\vec{r})\right)\right] \quad 9.9.9.$$

Адатта, так далилдөөсү жок болсо да, алгач газдын кичине көлөмдөрүндө Максвеллдин (9.9.7)-локалдык бөлүштүрүүсү жана, макроскопиялык релаксация убактысынан кийин Максвелл-Больцмандын (9.9.9)- тең салмактуу бөлүштүрүүсү орнойт деп эсептелет. Больцмандын кинетикалык теңдемеси релаксациянын бул экинчи стадиясын түшүндүрбөйт.

Мына ошентип, идеалдуу газдын биз мурда окуп үйрөнгөн тең салмактуу бөлүштүрүү функциялары толук тең салмактуулук учуру үчүн Больцмандын кинетикалык теңдемесинин чечимдери болушарына ынандык. Акырында, молекулалар координаттары жана ылдамдыктары боюнча тең салмактуулукка өз алдынча, бири-биринен көз карандысыз жетише аларын белгилей кетели, анткени молекулалардын координаттар жана ылдамдыктар боюнча релаксация убактылары бири-биринен айырмалануулары мүмкүн.

Эми туюк системалардагы кинетикалык процесстердин кайрылбастыгын биринчи жолу молекулалык деңгээлде теориялык түшүндүрүүгө аракет жасоого мүмкүндүк берген Больцмандын атактуу Н-теоремасын далилдейли.

Мейкиндикте молекулалары бир калыпта бөлүштүрүлгөн ( $\frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$ ) жана сырттан күч аракет этпеген ( $\vec{F} = 0, \vec{w}_k = 0$ ) бир атомдуу идеалдуу газды карайлы. Жалпы учурда мындай газ ылдамдыктары боюнча тең салмаксыз  $f(\vec{g}, t)$  функциясынын жардамында сүрөттөлөт жана Больцмандын кинетикалык теңдемеси

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \iint (\tilde{f}f^1 - ff^1) q d\sigma(q, \vec{e}) d^3 \mathcal{G}^1 = \iint (\tilde{f}f^1 - ff^1) q d\sigma(q, \vec{e}) d\vec{g}^1 \quad 9.9.10.$$

көрүнүшүн алат. Бөлүштүрүү функциясынан ылдамдыктар мейкиндиги боюнча алынган интеграл, (9.1.1) нормалаштыруу шартына ылайык, молекулалардын концентрациясына барабар:

$$\int f(\vec{g}, t) d\vec{g} = \frac{N}{V} = n, \quad 9.9.11.$$

жана каралып жаткан шарттарда турактуу чоңдук болуп эсептелет.

$$H(t) = \int f(\vec{g}, t) \ln f(\vec{g}, t) d\vec{g} \quad 9.9.12.$$

функциясын киргизели. Анын туундусу

$$\frac{dH}{dt} = \int \left( \frac{\partial f}{\partial t} \ln f + \frac{\partial f}{\partial t} \right) d\vec{\mathcal{G}} = \int \frac{\partial f}{\partial t} \ln f d\vec{\mathcal{G}}, \quad 9.9.13.$$

анткени, (9.9.11)-ди эске алганда

$$\int \frac{\partial f}{\partial t} d\vec{\mathcal{G}} = \frac{\partial}{\partial t} \int f(\vec{\mathcal{G}}, t) d\vec{\mathcal{G}} = \frac{dn}{dt} = 0.$$

(9.9.10)-ду (9.9.13)-кө коелу:

$$\frac{dH}{dt} = - \int [ff^1 - \tilde{f}\tilde{f}^1] \ln f q d\sigma(q, \vec{e}) d\vec{\mathcal{G}}^1 d\vec{\mathcal{G}}. \quad 9.9.14.$$

Өзгөрүлмөлөрдү төмөнкүдөй үч жол менен өзгөртүп, бул тендемени үч жолу кайрадан жазып чыгалы:

- 1)  $\vec{\mathcal{G}} \leftrightarrow \vec{\mathcal{G}}^1, \quad \tilde{\vec{\mathcal{G}}} \leftrightarrow \tilde{\vec{\mathcal{G}}}^1$
- 2)  $\vec{\mathcal{G}} \leftrightarrow \tilde{\vec{\mathcal{G}}}, \quad \vec{\mathcal{G}}^1 \leftrightarrow \tilde{\vec{\mathcal{G}}}^1$
- 3)  $\vec{\mathcal{G}} \leftrightarrow \tilde{\vec{\mathcal{G}}}^1, \quad \vec{\mathcal{G}}^1 \leftrightarrow \tilde{\vec{\mathcal{G}}}$

Биринчисинде  $f \leftrightarrow f^1$  жана  $\tilde{f} \leftrightarrow \tilde{f}^1$ , ошондуктан интегралдын астындагы  $[ff^1 - \tilde{f}\tilde{f}^1]$  жана  $d\vec{\mathcal{G}}d\vec{\mathcal{G}}^1$  тер өзгөрүшпөйт, салыштырма ылдамдык  $q = |\mathcal{G}^1 - \mathcal{G}| = |\mathcal{G} - \mathcal{G}^1|$  жана чачыроонун дифференциалдык кесилиши  $d\sigma(q, \vec{e})$  да мурдагыдай эле калат,  $\ln f$  функциясы  $\ln f^1$  ке алмашат. Бул алмаштыруу кагылышуучу молекулалардын ордуларын алмаштырган учурга туура келет.

Экинчисинде  $[ff^1 - \tilde{f}\tilde{f}^1]$  белгисин өзгөртөт,  $\ln f \rightarrow \ln \tilde{f}$ , калгандары өзгөрбөйт. Бул - түз кагылышууну тескери кагылышууга алмаштырганга барабар.

Бул өзгөртүүнүн комбинациясы болгон акыркы, үчүнчү орун алмаштырууда  $[ff^1 - \tilde{f}\tilde{f}^1]$  белгисин (9.9.14)-төгүгө салыштырмалуу өзгөртөт.  $\ln f \rightarrow \ln \tilde{f}$ , калгандары турактуу.

Алынуучу тендемелери өз ара кошуп жана 4кө бөлүп

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{1}{4} \int [ff^1 - \tilde{f}\tilde{f}^1] (\ln ff^1 - \ln \tilde{f}\tilde{f}^1) q d\sigma(\vec{q}, \vec{e}) d\vec{\mathcal{G}}^1 d\vec{\mathcal{G}}. \quad 9.9.15.$$

Интеграл астындагы  $[ff^1 - \tilde{f}\tilde{f}^1] (\ln ff^1 - \ln \tilde{f}\tilde{f}^1)$  көбөйтүндүсү  $(x-y)(\ln x - \ln y)$  көрүнүшүндөгү функцияны берет. Логарифм - монотондуу өсүүчү функция болгондуктан бул көбөйтүндү терс болушу мүмкүн эмес, б.а. ал дайыма  $\geq 0$ .  $d\sigma(\vec{q}, \vec{e})$  жана  $q$  чоңдуктары аныктоо боюнча оң болушкандыктан

$$\frac{dH}{dt} \leq 0 \quad 9.9.16.$$

болот, жана бул туюнтмадагы барабардык белгиси  $ff^1 = \tilde{f}\tilde{f}^1$  болгондо гана орун алат. Бул учурда газ, биз жогоруда көргөндөй, тең салмактуу абалда жана Максвеллдин бөлүштүрүү функциясына баш ийет.

Мына ошентип, эгерде газ ылдамдыктары боюнча тең салмаксыз абалда болгон болсо, анда молекулалардын кагылышууларынын

натыйжасында (9.9.12)  $H(t)$ -функциясы, тең салмактуулук абалындагы эң кичине маанисине жеткенге чейин, жогору ылдамдыкта монотондуу азаят. Бул - системанын тең салмактуу абалы ( $\partial H/\partial t = 0$ ) деталдык тең салмактуулук учурунда гана орун алышы мүмкүн дегенди билдирет.

Идеалдуу газдын  $H$ - функциясы (9.9.12) анын энтропиясы менен бир маанилүү байланышкан. Тең салмаксыз макросистеманын толук энтропиясынын

$$S(t) = -k \int f(\vec{r}, \vec{q}, t) \ln f(\vec{r}, \vec{q}, t) d\vec{r} d\vec{q} \quad 9.9.17.$$

жана салыштырма (локалдык) энтропиясынын

$$s(\vec{r}, t) = -k \int f(\vec{r}, \vec{q}, t) \ln f(\vec{r}, \vec{q}, t) d\vec{q} \quad 9.9.18.$$

аныктоолору менен (9.9.12)-формулананы салыштырып  $H$ - функциясы жана энтропия бири-биринен белгиси боюнча жана кандайдыр-бир санга гана айырмаланышарын көрүүгө болот.

Ошондуктан (9.9.16)-барабарсыздыгы (9.9.17)-(9.9.18) ди эске алганда

$$\frac{dS}{dt} \geq 0 \quad 9.9.19.$$

га тең күчтүү, б.а. молекулалардын кагылышууларынын эсебинен ылдамдыктар боюнча тең салмактуу бөлүштүрүүнүн орноо процессинде идеалдуу газдын энтропиясынын монотондуу кайрылбас өсүшү  $H$ -теореманын түздөн-түз натыйжасы болуп эсептелет.

(9.9.19)-формулананы термодинамиканын экинчи законунун - энтропиянын өсүү законунун далилдениши катары кабыл алууга болор эле.

Мына ошентип, Больцмандын кинетикалык теңдемеси, ал механиканын убакыт боюнча кайрылуучу теңдемелеринен келтирилип чыгарылгандыгына карабастан, кайрылбас процесстерди сүрөттөйт.

Кайрылбастыктын келип чыгышынын себеби теңдемени келтирип чыгарууда молекулалык хаосту эсепке алуучу чачыроонун ыктымалдыгы түшүнүгүн пайдаланууда жатарын белгилеп кеткенибиз оң.

Больцмандын  $H$ -теоремасынын жогорудагыдай мааниде талкууланышы замандаштарынын катуу каршылыгын пайда кылды. Ал айтылган каяшалардын олуттуулугун түшүнүү үчүн ошол кезде көпчүлүк физик жана химик окумуштуулар молекуланы айрым талкуулоолор үчүн гана ыңгайлуу инструмент катары колдонулуучу, бирок реалдуу жашабаган, фантазиянын жемиши катары эсептешкендигин эске алуу зарыл. Электродинамиканын теңдемелерин механикалык моделдердин жардамында түшүндүрүүгө болгон аракеттердин натыйжасыз аякташы да буга кандайдыр бир негиз түзө алды. Ошондуктан каяша айтуулар жөн гана Больцмандын теңдемесине

багытталбастан молекулалык теориянын жалпы жактоочуларына каршы багытталган, сөз бул теориянын баш аягы бири-бирине дал келбегендиги жөнүндө болгон. Эң олуттуу каяша механиканын теңдемелеринин убакытка карата кайрылуучулугу жана Пуанкаренин *кайтып келүү теоремасы* менен байланышкан.

Пуанкаре *«убакыттан айкын көз каранды болбогон гамильтониан аркылуу берилген жана финиттик кыймыл жасоочу ар кандай механикалык система эртедир-кечтир баштапкы абалына өтө жакындап келет»* деген теореманы далилдеген.

Цермело бул теоремага ылайык системада эң бир күтүлбөгөн кубулуштар, айталы, газдын бардык молекулалары өз алдынча идиштин бир жак жарымына чогулуп калышы мүмкүн болорун белгилеп кеткен.

Ага Больцман *«Силерге аны өтө узак күтүүгө туура келет»* деп жооп берген. Лошмидт бардык молекулалар так карама-каршы (терс) ылдамдыктарга ээ болуучу абалдар газ учурда ээ болуп турган абалдар сыяктуу эле ыктымалдыктарга ээ болушарын белгилеген. Ошондуктан, бардык молекулаларды тескерисинче кыймылдатканда процесстер да тескери багытта жүрүшү керек, жана алар, энтропиясы өсүүчү процесстердей эле ыктымалдуу болушат.

Больцман ага *«ылдамдыктарды буруп көргүлө»* деп жооп берген, бирок энтропиянын өсүүсү жөнүндөгү аныктоого *«энтропия дээрлик бардык учурда өсөт»* деп түзөтүү киргизген.

Лошмидт молекулалык-кинетикалык теориянын жактоочуларынан болгондугун белгилей кетүү зарыл, ал Авагадронун санын аныктоонун алгачкы жолдорунун бирин ойлоп тапкан. Бирок молекулалардын бар экендигине, *«жашашына»* Перрендин тажрыйбаларынан кийин гана чындап ишене башташкан. Анткени Броун кыймылын изилдөө боюнча Перрендин тажрыйбасы (1908-ж) молекулалык-кинетикалык көз караштарга негизделген Эйнштейн-Смолуховскийдин теориясын толук далилдеген эле.

Молекулалардын кыймылынын ылдамдыгын тескери багытка буруп эсептеген акыркы мезгилдердеги компьютердик эксперименттер да тең салмаксыз процесстердин кайрылбастыгын *«ырастады»*.

Биз мурда бир нече ирет белгилегендей, микропроцесстердин убакыттын өтүшү менен жүрүшүн аныктоочу закондор классикалык механикада да, кванттык механикада да убакыттын белгисинин өзгөрүлүшүнө карата инварианттуу болушат. Бул бардык микропроцесстер сөзсүз түрдө кайрылуучу, б.а. шарттарды тиешелүү түрдө өзгөрткөндө ар кандай микропроцесс бир эле орто аралык абалдар аркылуу өтүп түз жана тескери багыттарда жүрө алат дегенди билдирет.

Мындан микропроцесстердин убакытка карата кайрылуучу закондоруна негизделген статистикалык физика кантип макропроцесстердин кайрылбас закондоруна, айталы, релаксация процесстерин сүрөттөөгө жана туюк системалардагы энтропиянын өсүү законуна алып келет деген суроо пайда болот.

Чындыгында эле, Лиувилдин теңдемеси, ага эквиваленттүү болгон Боголюбовдун теңдемелер чынжыры кайрылуучу гана процесстерди сүрөттөшөт. Макропроцесстердин кайрылбастыгы эсептөөлөрдүн бир топ кийинки этаптарында гана, бул чынжырды үзүү үчүн айрым бир жакындаштырылган методдорду киргизүүнүн натыйжасында пайда болот.

Мына ошентип, макросистеманын абалынын эволюциясы, абстрактуу айтканда, микропроцесстер сыяктуу эле кайрылуучу болушат. Мисалы, системанын ар кандай тең салмактуу макроабалы, эртедир-кечтир кайталанышы мүмкүн. Бирок эсептөөлөр, тең салмактуулуктан алыс четтөөлөрдүн кайта кайтып келүү убактысы өтө узак - Жердин жашынан гана эмес, ааламдын бизди курчап турган бөлүгүнүн жашынан да алда канча көп экендигин көрсөтөт. Ошондуктан, термодинамикалык тең салмактуулуктан сезилерлик четтөөлөр жөнүндө сөз болгондо, алардагы макропроцесстерди, иш жүзүндө, кайрылбас деп эсептөөгө туура келет.

Алгачкы кайрылуучу Боголюбовдун теңдемелер системасын же ага эквиваленттүү болгон Лиувилдин теңдемесин өзгөртүп түзүүнүн кайсы этабында теңдемелердин кайрылбастыгы пайда болот деген табигый суроо жаралышы мүмкүн.

Анын жообу төмөнкүдөй: механиканын теңдемелери кайрылуучу болушкандыктан кайрылбастык ал теңдемелерди механикага жат, ыктымалдык мүнөзгө ээ гипотезалар менен толуктаган учурда пайда болот. Фоккер-Планктын теңдемесин алууда мындай гипотеза болуп *процесстин Марковдук мүнөзү жөнүндөгү божомол* (Смолуховскийдин теңдемеси) эсептелет. Боголюбовдун теңдемелер системасынан Больцмандын теңдемесин келтирип чыгарууда мындай гипотезанын ролун *корреляциялардын начардашынын шарты* аткарат ж.б.д.у.с. Мындай гипотезаларды киргизүү бөлүкчөлөрдүн өз ара аракеттенишүүлөрүнүн, мисалы, кагылышууларынын ролу менен тыгыз байланышкан. Ал абалдын бөлүштүрүү функциясы менен сүрөттөлүүчү бир багыттуу эволюциясын пайда кылуучу фактор болуп эсептелет. Чындап эле, бөлүкчөлөрдүн өз ара аракеттенишүүсүн, мисалы, кагылышууларды эске албай табылган кинетикалык теңдемелерде (мисалы, өз ара жуурулушкан талаанын теңдемеси, эркин молекулалык агым теңдемеси) кайрылбастык пайда болбойт.



Мына ошентип, баштапкы тең салмаксыз абалдын убакыт боюнча эволюциясын төмөнкүдөй элестетүүгө болот. Алгачкы релаксация убактысынын ичинде системада энтропиянын өсүшү менен коштолуучу кайрылбас процесс жүрөт. Системанын андан аркы эволюциясында анын релаксация убактысына караганда өтө узак убакыт интервалы ичинде система, кайтып келүү теоремасына ылайык, кайтадан тең салмаксыз абалына өтөт, жана бул учурда байкоочу энтропиянын азайышы менен жүрүүчү процессти каттайт. Бирок, чоң флуктуациялар үчүн кайтып келүү убактылары, байкоонун мүмкүн болгон убактыларына караганда көптөгөн эсе чоң болот. Ошондуктан, мындай флуктуацияларга карата эволюция, иш жүзүндө, кайрылбас болуп калат. А эгерде сөз майда флуктуациялар жөнүндө болсо, анда алар тез-тез, флуктуациянын масштабы канчалык кичине болсо, ошончолук тез кайталанып турушат. Ошондуктан байкоо убактысы ичинде энтропиянын азайышы менен жүрүүчү процесстер энтропиянын өсүшү менен коштолуучу процесстер сыяктуу эле тез-тез байкалып турушат жана эволюциянын картинасы кайрылуучу болуп калат.

Мына ошентип, толук аныкталган динамикалык системада хаотикалык кыймыл пайда болот. Муну менен байланышкан маселелерди изилдөө физика менен математиканын чегиндеги активдүү өнүгүп бараткан багытты түзөт.

Биз мурдагы параграфтарда (9.4) белгилегендей, Н.Н.Боголюбов ж.б. Больцмандын теңдемесин келтирип чыгаруунун, белгилүү бир мааниде «кийинки жакындаштыруудагы» теңдемелерди алуунун жолун сунуштап өнүктүрүштү. Газдардын аралашмасы үчүн теңдемелер, серпилгичтүү эмес кагылышууларды, молекулалардын импульс моментине ээ болушун ж.б. эске алуучу Больцмандын теңдемелеринин версиялары түзүлдү.

Аягында дагы бир жагдайга токтоло кетели. Эгерде энтропия тең салмактуу маанисин көздөй дайыма өсө турган болсо, анда тең салмактуулук абалында, мисалы энтропиянын флуктуациясы, же бардык башка чоңдуктардын флуктуациясы кантип пайда болот деген суроо жаралышы мүмкүн.

Ушуга байланыштуу Больцмандын теңдемесиндеги  $f$  – функциясы –чексиз кичине көлөм боюнча орточолоштурулган бөлүштүрүү функциясы экендигин эскерте кетели. Анын маанилери (толтуруунун орточо сандары) да флуктуацияланышы мүмкүн, бирок бул жагдай Больцмандын теңдемесинде эсепке алынбайт.

## СТАТИСТИКАЛЫК ФИЗИКА ЖАНА ТЕРМОДИНАМИКА БОЮНЧА МАСЕЛЕЛЕР

Бул бөлүмдө статистикалык физика жана термодинамика боюнча түрдүү татаалдыктагы маселелер топтолгон. Алар практикалык сабактарда студенттер менен бирге чечүү үчүн пайдаланышы жана студенттерге үй тапшырмасы катары өз алдынча иштөө үчүн берилиши мүмкүн. Сунуш кылынган маселелердин көптүгү окутуучуга студенттердин билим деңгеелине жараша тиешелүү татаалдыктагы маселелерди тандап алууга мүмкүндүк берет. Студенттердин теориялык материалдарды өздөштүрүүсүнө жана бекемдөөсүнө өбөлгө түзүү, маселе чыгаруу көндүмдөрүн өнүктүрүү жана өз алдынча иштөө маданиятын калыптандыруу максатында бардык маселелер, алардын ичинде эң жөнөкөйлөрү да, чыгарылыштары менен берилди. Бирок, чындап билим алууну, өз билим деңгеелин сынап-өнүктүрүүнү көздөгөн студент алгач маселени өз алдынча чыгарууга, керектүү маалыматтарды тиешелүү окуу китептеринен таап пайдаланууга аракет кылып, андан кийин гана анын китептеги чыгарылышы менен таанышканы оң. Чыгара албай калган маселени даяр чыгарылышы менен өз ара салыштырып, өзүнүн кетирген катасын таап түзөтүү да белгилүү үйрөтүүчүлүк баалуулукка ээ.

Практикалык сабактар тиешелүү теориялык материалдарды өздөштүргөндөн кийин өтүлгөндүктөн жана маселелер теориялык окуу колдонмосунун өзүндө жайгаштырылгандыктан ар бир бөлүмдүн башталышында, өзүнчө маселе китептериндегидей, чакан теориялык маалыматтар, түшүнүктөр, негизги формулалар кайталанып берилген жок. Маселелерди чечүү үчүн дифференциалдык жана интегралдык эсептөөлөрдүн ЖОЖдордо өтүлүүчү курсунун чегиндеги математикалык даярдык толук жетиштүү. Маселелерди чыгаруу үчүн зарыл болгон айрым маалыматтар өзүнчө тиркемеде берилди.

## 1. Статистикалык физиканын негизги түшүнүктөрү жана принциптери

- 1.1 Гармоникалык осциллятор үчүн Гамильтондун теңдемелерин чечкиле.
- 1.2 Гармоникалык осциллятордун кинетикалык жана потенциалдык энергияларынын орточо маанилерин тапкыла.
- 1.3 Гармоникалык осциллятордун фазалык траекториясын аныктагыла.
- 1.4 Инерция боюнча кыймылдоочу материалдык чекит үчүн Лиувилдин теоремасын текшергиле.
- 1.5 Радиусу  $r$  ге барабар эки серпилгичтүү шарча горизонталдык сайчаны бойлото сүрүлүүсүз кыймылдап баратышат.  $(\vartheta_1, \vartheta_2)$  ылдамдыктардын тегиздигинде  $d\vartheta_1 d\vartheta_2$  элементардык көлөмүнүн кагылышууга чейинки жана кагылышуудан кийинки абалдарын сүрөттөгүлө жана  $d\vartheta_1 d\vartheta_2 = d\vartheta_1' d\vartheta_2'$  болорун көрсөткүлө, мында  $\vartheta_1'$  жана  $\vartheta_2'$  - бөлүкчөлөрдүн кагылышуудан кийинки ылдамдыктары.
- 1.6 Оордук күчүнүн бир тектүү талаасында эркин түшүп келе жаткан чекит үчүн фазалык траекториянын теңдемесин тапкыла.
- 1.7 Эркин материалдык чекиттин релятивисттик кыймылынын энергиясы  $\varepsilon$  дон ашпаган бардык мүмкүн болгон абалдарына туура келүүчү фазалык мейкиндиктин көлөмүн тапкыла.
- 1.8  $\varepsilon$  дон  $\varepsilon + d\varepsilon$  го чейинки интервалдагы энергияларга ээ болгон фотондун кванттык абалдарынын санын тапкыла.
- 1.9 Бир өлчөмдүү гармоникалык осциллятордун бир кванттык абалына туура келүүчү фазалык мейкиндиктин көлөмүн тапкыла.
- 1.10 Материалдык чекиттердин бир тектүү оордук күчүнүн талаасындагы бир өлчөмдүү кыймылынын фазалык траекторияларын тапкыла. Лиувилдин теоремасынын аткарыларын көрсөткүлө. (Фазалык чекиттердин баштапкы абалдарын квадраттын жактарына коюп алгыла.)

## 2. Ыктымалдыктар теориясынын элементтери жана анын айрым колдонулуштары

- 2.1 Бөлүкчө кеңдиги  $a$  га барабар чексиз терең бир өлчөмдүү потенциалдык чуңкурда жайгашкан. Бөлүкчөнү классикалык кыймылдайт деп эсептеп, анын  $[x, x + dx]$  интервалында болуп калышынын ыктымалдыгын аныктагыла.

- 2.2 Парабола түрүндөгү бир өлчөмдүү потенциалдык чуңкурда кыймылдаган бөлүкчөнүн  $[x, x + dx]$  интервалында болуп калышынын ыктымалдыгын аныктагыла.
- 2.3 Материалдык чекит  $x = a \cos \omega t$  закону боюнча гармоникалык термелүүлөрдү жасайт. Чекиттин  $x$  тен  $x + dx$  ке чейинки аралыкта болуп калышынын ыктымалдыгын тапкыла.
- 2.4 Кокустук чоңдуктардын суммасынын орточо мааниси бул чоңдуктардын орточо маанилеринин суммасына барабар экендигин көрсөткүлө:  $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$ .
- 2.5 Эки көз карандысыз чоңдуктардын көбөйтүндүсүнүн орточо мааниси бул чоңдуктардын орточо маанилеринин көбөйтүндүсүнө барабар экендигин көрсөткүлө:  $\overline{xy} = \overline{x} \overline{y}$
- 2.6  $N$  сандагы бирдей статистикалык көз карандысыз бөлүкчөлөрдөн түзүлгөн система берилген. Бөлүкчөлөрдүн биринин  $p$  – абалда болуп калышынын ыктымалдыгы  $p$  га барабар болсун. Ушул абалда  $n$  бөлүкчөнүн болуп калышынын ыктымалдыгын аныктагыла.
- 2.7 «Спортлото» оюнундагы 49 сандан үч жана алты санды туура табуунун ыктымалдыгын аныктагыла.
- 2.8 2.6 маселедеги бөлүкчөлөрдүн системасында  $N \gg n$  болсун.  
а)  $N \rightarrow \infty$  жана б)  $n \rightarrow N$  учурлары үчүн  $p$  – абалда  $n$  бөлүкчөнүн болуп калууларынын ыктымалдыктарын аныктагыла.
- 2.9 Сөөк оюнунда анын бардык жактары бирдей ыктымалдыкта «түшөт». Ушундай сөөктөрдөн бешөөнү ыргыткан учурду карайлы. Бул оюнда алты санынын: а) бир сөөктө, б) жок дегенде бир сөөктө, в) эки сөөктө түшүшүнүн ыктымалдыгын тапкыла.
- 2.10 Электр чынжыры  $k$  элементинин же  $k_1$  жана  $k_2$  эки элементинин бузулушунан үзүлүшү мүмкүн. Элементтер бири-биринен көз карандысыз тиешелүү түрдө 0,3; 0,2 жана 0,2 ыктымалдыктар менен бузулушат. Электр чынжырынын үзүлүшүнүн ыктымалдыгын аныктагыла.
- 2.11  $T$  убактысынын ичинде эсептөө машинасынын  $k$ -блогунун иштен чыгышынын ыктымалдыгы  $w_k$  га барабар ( $k = 1, 2, \dots, n$ ). Эгерде бул машинанын  $n$  блогунун бардыгы бири-биринен көз карандысыз болушса, анда көрсөтүлгөн убакыттын ичинде жок дегенде бир блоктун иштен чыгышынын ыктымалдыгын аныктагыла.
- 2.12 Айлана боюнча бир калыпта айлануучу чекит үчүн бурчтар боюнча бөлүштүрүлүү функциясы  $\rho$  ну тапкыла.
- 2.13 Система ыктымалдыктардын  $dw \sim xy dx dy$  бөлүштүрүлүшү менен мүнөздөлөт, мында  $x$  жана  $y$  чоңдуктары  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$

интервалдарындагы маанилерге ээ болушат. Ыктымалдыктардын бөлүштүрүлүшүн нормалаштыргыла.

- 2.14 Эгерде  $dw(x) = const \cdot e^{-\alpha x}$  болсо, анда  $x$  чоңдугу менен  $y^2 = x$  туюнтмасы аркылуу байланышкан  $y$  чоңдугу үчүн ыктымалдыктардын бөлүштүрүлүшүн тапкыла.
- 2.15 Оюн сөөгүн бир жолу ыргытканда түшүүчү упайлардын орточо санын тапкыла.
- 2.16  $a$  менен  $b$  нын аралыгында бир калыпта бөлүштүрүлгөн  $x$  чоңдугунун  $\bar{x}$  жана  $\overline{x^2}$  маанилерин тапкыла.
- 2.17  $a$  дан  $b$  га чейинки интервалда бир калыпта бөлүштүрүлгөн  $x$  чоңдугунун  $(\Delta x)^2$  дисперсиясын аныктагыла.
- 2.18 Пуассондун  $\frac{a^n e^{-a}}{n!}$  бөлүштүрүүсү нормалаштыруу шартын канааттандырышынын көрсөткүлө.
- 2.19 Пуассондун бөлүштүрүүсүнө баш ийүүчү кокустук чоңдуктун орточо маанисин тапкыла.
- 2.20 Аппаратура 2000 ишеничтүү элементтерден турат, алардын ар биринин иштебей калышынын ыктымалдыгы 0,0005 ке барабар. Элементтердин жок дегенде бирөөсү эле бузулса, аппаратура иштебей калат. Бузулган элементтердин санынын бөлүштүрүлүшү Пуассондун бөлүштүрүүсүнө баш ийет деп эсептеп, аппаратуранын иштебей калышынын ыктымалдыгын аныктагыла.
- 2.21 Гаусстун нормалаштырылган  $f(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2}$  ( $-\infty < x < +\infty$ ) бөлүштүрүүсү үчүн  $\bar{x}$ ,  $\overline{x^2}$  жана  $(\Delta x)^2$  ну тапкыла.
- 2.22 Кеменин туурасынын чайпалуусунун кокустук амплитудаларынын ыктымалдыктарынын бөлүштүрүлүшүнүн тыгыздыгы Релейдин  $f(x) = \frac{x}{a^2} e^{-\frac{x^2}{2a^2}}$  ( $x \geq 0$ ) законунун көрүнүшүнө ээ, мында  $a$  – кеменин максималдык кыйшаюусу. Чайпалуу учурунда кеменин орточо кыйшаюусун тапкыла.

### 3. Термодинамиканын негиздери. Термодинамикалык функциялар

- 3.1 Бир моль суу  $100^\circ\text{C}$  жана нормалдуу басым кезинде бууга айлангандагы буулануу жумушун эсептегиле. Бул учурда берилген жылуулук санын да аныктагыла.
- 3.2 Жылуулук сыйымдуулугу турактуу сакталуучу процесс политроптук процесс деп аталат. Идеалдуу газ үчүн  $P$  жана  $V$  өзгөрүлмөлөрүндө политропанын теңдемесин тапкыла.

(Термодинамиканын биринчи законунан жана Клапейрондун тендемесинен пайдалангыла).

- 3.3 Политроптук процесстин жумушун тапкыла.
- 3.4 Басымы  $P_1 = 4 \text{ атм}$  жана  $t_1 = 60^\circ \text{C}$  болгон  $5 \text{ м}^3$  аба политроптук түрдө  $P_2 = 1 \text{ атм}$  басымына жана үч эселенген көлөмгө чейин кеңейет. Бул процесстеги политропа көрсөткүчүн, кеңейүү жумушун, жылуулук санын жана ички энергиянын өзгөрүшүн эсептегиле.
- 3.5 Талааны түзүүчү заряддардын кыймылы менен байланышкан диэлектриктин поляризацияланышынын элементардык жумушун тапкыла.
- 3.6 Узун соленоиддин өзөкчөсүнүн бирдик көлөмүнүн магниттештирүүнүн бир толук циклинде аткарган жумушун эсептегиле. Координата октору  $H, J$  болгон диаграммада өзөкчөнүн гистерезис илмегинин аянты  $S$  ке барабар.
- 3.7 Сырткы  $a$  параметрине түйүндөш  $A$  жалпыланган күчтүн аракетине дуушар болгон ар кандай жөнөкөй система үчүн
- $$\left(\frac{\partial T}{\partial A}\right)_a \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_T \left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_A = -1$$
- тендештиги орун аларын көрсөткүлө.
- 3.8 Жумуштун  $\delta A = PdV$  дифференциалдык туюнтмасы толук дифференциал эмес экендигин көрсөткүлө.
- 3.9 Бийиктиктин жогорулашы менен тропосферанын температурасынын төмөндөшүнүн себебин түшүндүргүлө жана, абаны идеалдуу газ деп эсептеп, атмосферанын температурасынын бийиктиктик градиентин тапкыла.
- 3.10 Жылуулук булагынан алынган жылуулуктун бардыгы толугу менен жумушка айлануучу процесс болушу мүмкүнбү?
- 3.11 Түбүнө анилин катмары, ал эми жогорку кырына чейин суу куюлган бийик химиялык стакан ыссык кум мончосуна коюлат. Бир аз убакыт өткөндөн кийин анилиндин тамчысы, оордук күчүнө каршы жумуш аткарып, суунун ачык бетине көтөрүлөт да, кайрадан түбүнө чөгөт. Бул процесс мончону ысытууну токтотконго чейин кайталана берет. Тамчынын мындай кыймылын кантип түшүндүрөбүз? Ал бир жылуулук булагынан алынган жылуулуктун эсебинен гана мезгилдүү жумуш аткаруунун мүмкүн эместиги жөнүндөгү термодинамиканын экинчи башталышына каршы келбейби?
- 3.12 Суунун көлөмдүк кеңейүү коэффициенти  $0^\circ \text{C} < t < 4^\circ \text{C}$  аралыгында терс чоңдук да  $4^\circ \text{C}$  да белгисин өзгөртөт. Температуранын бул интервалында адиабаттык кысканда суу, башка суюктуктардан

жана бардык газдардан айырмаланып, ысыбастан муздап кетерин көрсөткүлө.

3.13  $dS = \frac{\delta Q}{T}$  формуласын пайдаланып идеалдуу газдын энтропиясын эсептегиле.

3.14 Ван-дер-Ваальстын газынын энтропиясын эсептегиле жана анын адиабатасынын теңдемесин тапкыла.

3.15 Бирдей массадагы эки - ыссык жана муздак суу аралашкан учурда энтропия өсөрүн көрсөткүлө. Суунун жылуулук сыйымдуулугун турактуу деп алгыла.

3.16 Бөлмөгө көчөдөн муздак нерсени алып киришти. Бул учурда ал нерсенин ички энергиясы бөлмөдөгү эмес, сырттан кирген абанын эсебинен көбөйөрүн жана от жакканда бөлмөдөгү абанын ички энергиясы жана энтропиясы азаярын көрсөткүлө.

3.17 Температуралары 27 жана 28<sup>0</sup>С болгон эки тело бири-бирине тийгизилип бириктирилди. Белгилүү бир убакытта ыссык нерседен муздагына *1 эрг ге* барабар жылуулук саны өттү. Бул өтүүнүн натыйжасында берилген нерселердин абалынын ыктымалдыгы канча эсеге өзгөргөндүгүн аныктагыла. Тескерисинче өтүүнүн ыктымалдыгы эмнеге барабар? Бул натыйжа  $1,2 \cdot 10^{-9}$  *эрг ге* барабар жылуулук санынын өтүүсү үчүн кандайча өзгөрөт?

3.18 Жөнөкөй система үчүн абалдын термикалык жана калорикалык теңдемелеринин байланыш формуласын тапкыла.

3.19 Ван-дер-Ваальстын абалдын термикалык

$$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$$

теңдемесинен  $\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \frac{a}{V^2}$  келип чыгарын көрсөткүлө.

3.20 Системанын эркин энергиясы төмөнкүдөй аныкталат:

$$F = C_V T(1 - \ln T) - \frac{a}{V} - RT \ln(V - b).$$

Абалдын термикалык жана калорикалык теңдемелерин тапкыла.

3.21  $dU = TdS - PdV,$   $dF = d(U - TS),$   
 $dH = d(U + PV),$   $dG = d(U + PV - TS)$

туюнтмаларынан Максвеллдин

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_P,$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_T, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = \left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T.$$

туюнтмаларын келтирип чыгаргыла.

3.22  $V = const$  кезиндеги жылуулук сыйымдуулук менен  $P = const$  кезиндеги жылуулук сыйымдуулукту байланыштыруучу туюнтманы келтирип чыгаргыла.

3.23 Энтропиясы

$$S = R \frac{V_0}{V} \left( \frac{T}{T_0} \right)^a$$

(мында  $V_0, T_0, a$  - турактуу чоңдуктар) формуласы аркылуу аныкталган системанын эркин энергиясын ( $F$ ) аныктагыла жана абалынын теңдемесин тапкыла.

3.24 Ар кандай чексиз кичине кайрылуучу процесстеги энтропиянын өзгөрүшү  $dS = \frac{\delta Q}{T}$  барабардыгы менен аныкталат, мында  $S$

тин дифференциалы толук дифференциал болуп эсептелет. а)

ар кандай процесс үчүн  $\int_A^B \frac{\delta Q}{T} \leq S(B) - S(A)$ ; б) жылуулук

алмашпоочу системанын энтропиясы эч качан азайбастыгын көрсөткүлө.

3.25 Идеалдуу газдын ички энергиясы анын басымынан жана көлөмүнөн көз каранды болбой, температуранын гана функциясы болорун далилдегиле.

3.26  $\left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V$ ,  $\left( \frac{\partial C_P}{\partial P} \right)_T = -T \left( \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right)_P$  катнаштарын далилдегиле.

3.27 Ички энергиясы температуранын гана функциясы болгон заттардын абалынын теңдемеси  $P = Tf(V)$  көрүнүшүндө болорун көрсөткүлө, мында  $f(V)$  - көлөмдүн берилген затка мүнөздүү болгон кандайдыр бир функциясы.

3.28 Тажрыйбада кайсы бир газдын басымы  $P$  менен салыштырма көлөмүнүн ( $V$ ) көбөйтүндүсү анын температурасынан гана көз каранды жана ички энергиясы да температуранын функциясы болору аныкталган. Термодинамиканын көз карашы боюнча мындай газдын абалынын теңдемеси жөнүндө эмнелерди айтууга болот?

3.29 Ички энергиясы анын көлөмүнөн ( $V$ ) көз каранды болбогон зат үчүн «турактуу көлөм кезиндеги жылуулук сыйымдуулук  $C_V$  температурадан гана көз каранды болот» деген тыянак аткарыларын далилдегиле.

3.30  $\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = - \frac{\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T}{\left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V}$  катнашын далилдегиле.



3.31 Термодинамиканын жекече туундулардагы дифференциалдык теңдемелеринен пайдаланып

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S > \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \text{ болорун, б.а. } PV \text{ диаграммасында адиабата ийриси}$$

изотерма ийрисине караганда тез өзгөрөрүн далилдегиле.

3.32  $\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$  катнашын далилдегиле.

3.33 Системанын  $C_p$  жылуулук сыйымдуулугу жана  $V$  көлөмү

$$C_p = \alpha T^3 \ln P,$$

$$V = \frac{\beta T^4}{P} \text{ теңдемелери аркылуу туюнтулушат, мында } \alpha \text{ жана } \beta -$$

турактуу чоңдуктар. Системанын энтальпиясын тапкыла.

3.34 Эгерде системанын абалынын теңдемеси  $P=P(V,T)$  көрүнүшүндө

болсо, анда  $P = \frac{\chi\alpha}{\beta}$  болорун далилдегиле, мында

$\chi = V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$  - серпилгичтиктин изотермалык көлөмдүк модулу;

$\beta = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \frac{1}{P}$  - турактуу көлөм кезиндеги басымдын жылуулук коэффициенти;  $\alpha = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \frac{1}{V}$  - турактуу басым астында

жылуулуктан кеңейүү коэффициенти.

3.35 Адиабаттык система үчүн температуранын сырткы басымга жараша өзгөрүшүн (термосерпилгичтик эффекти) эсептегиле.

3.36 Турактуу басым астында кеңейген нерсенин энтропиясынын өзгөрүшүн тапкыла.

#### **4. Статистикалык физиканын газдардын касиеттерин окуп үйрөнүүгө колдонулуштары**

##### **Максвелл-Больцмандын бөлүштүрүүсү**

4.1 Температурасы 273К болгон азоттун молекулаларынын кандай бөлүгү 250 дөн 255  $\text{м/с}$  га чейинки интервалдагы ылдамдыктарга ээ болуп кыймылдашат?

4.2 Температурасы 273К болгон кычкылтектин ылдамдыктарынын проекциялары  $\vartheta_x$  500 дөн 501  $\text{м/с}$  чейин жана ылдамдыктарынын модулу 500 дөн 501  $\text{м/с}$  чейин болгон молекулаларынын санын салыштыргыла.

- 4.3 Идиште молекулаларынын массалары  $m_1$  жана  $m_2$  болгон идеалдуу эки газдын аралашмасы жайгашкан. Системаны статистикалык тең салмактуулук абалында деп эсептеп, бул эки газдын бөлүштүрүү функцияларын тапкыла.
- 4.4 Газдагы молекулалардын тескери ылдамдыгынын чоңдугунун орточо маанисин тапкыла.
- 4.5 Ылдамдыгынын  $x$ -компоненти  $0 \leq g_x \leq g_x^0$  интервалында жаткан газдын молекулалардын санын эсептегиле.
- 4.6 Ылдамдыктары эң ыктымалдуу ылдамдыктан чоң болгон молекулалардын үлүшүн тапкыла.
- 4.7 Молекулалардын кандай бөлүгүнүн ылдамдыгынын модулу  $g = \frac{g_{эб}}{2}$  жана  $g = 2g_{эб}$  аралыгында жатат?
- 4.8  $g$  дан  $g + dg$  га чейинки ылдамдыктарга ээ болушкан жана  $1\text{с}$  ичинде дубалдын бетинин  $1\text{см}^2$  не урунган газдын молекулаларынын санын тапкыла.
- 4.9 Молекулалардын идиштин  $1\text{см}^2$  бетине  $1\text{с}$  ичиндеги урунууларынын санын  $\nu = \frac{n\bar{g}}{4}$  көрүнүшүндө туюнтууга болорун көрсөткүлө, мында  $\bar{g}$  – молекулалардын орточо ылдамдыгы,  $n$  – молекулалардын концентрациясы.
- 4.10 Сейректелген газ көлөмү  $V$  болгон идиште  $P$  басымына ээ. Газдын молекулалары ылдамдыктары боюнча максвеллдик бөлүштүрүлгөн деп эсептеп, идиштеги кичинекей, аянты  $S$  болгон, тешиктен газдын вакуумга агып чыгышынын тездигин эсептегиле.
- 4.11 Газ жылуулук кыймылында болгон жана  $\lambda_0$  толкун узундугундагы жарыкты нурдантуучу  $N$  атомдон турат. Спектроскоптун жардамында өлчөнгөн газдын нурдануу интенсивдүүлүгүнүн толкун узундугуна жараша бөлүштүрүлүү законун тапкыла.
- 4.12 Атомдун кинетикалык энергиясы үчүн ыктымалдыктардын бөлүштүрүлүшүн тапкыла.
- 4.13 Газдагы молекулалардын эң ыктымалдуу энергиясын ( $\varepsilon_{э,б}$ ) эсептегиле.  $\varepsilon_{э,б} \neq \frac{1}{2} m g_{э,б}^2$  болорун көрсөткүлө.
- 4.14 Идеалдуу газдын молекулаларынын кинетикалык энергиясы энергиянын берилген  $\varepsilon_0$  маанисинен ашпоосунун ыктымалдыгын тапкыла.
- 4.15 Больцмандын энергиялар боюнча  $f(E) = A e^{-E/kT}$  бөлүштүрүүсү энергиянын аддитивдүү түзүүчүлөрүнө карата мультипликативдүүлүк касиетине ээ болорун көрсөткүлө.
- 4.16  $0^\circ\text{C}$  кезинде абанын басымы кандай бийиктикте үч эсеге азаят?

- 4.17 Жер бетиндеги аба мамычасынын орточо бийиктигин тапкыла.
- 4.18 Оордук күчүнүн талаасында жайгашкан абанын молекулаларынын орточо квадраттык бийиктигин тапкыла.
- 4.19 Жердин үстүндөгү негизинин аянты  $1\text{см}^2$  болгон аба мамычасындагы молекулалардын жалпы санын бийиктиги 1000м болгон мамычадагы молекулалардын саны менен салыштыргыла.
- 4.20 Жердин бетиндеги басымды аныктоочу абанын чексиз мамычасынын салмагын тапкыла.
- 4.21 Бийиктиги  $h$  болгон тик цилиндрде жайгашкан идеалдуу газдын молекулаларынын орточо потенциалдык энергиясын эсептегиле.

### **Гиббстин бөлүштүрүүлөрү. Идеалдуу газдын статистикасы**

- 4.22 Энтропияны абалдардын интегралы (статистикалык сумма) аркылуу туюнткула.
- 4.23 Системанын жылуулук сыйымдуулугун абалдардын интегралы аркылуу туюнткула.
- 4.24 Гиббстин термодинамикалык потенциалынын абалдардын интегралы аркылуу туюнтулушун тапкыла.
- 4.25 Энтальпияны абалдардын интегралы аркылуу туюнткула.
- 4.26 Энергиялары боюнча Гиббстин бөлүштүрүүсүн гармоникалык осциллятор үчүн классикалык жакындаштырууда жазгыла.
- 4.27 Энергиясы температура менен  $E = NkT$  ( $N \gg 1$ ) туюнтмасы аркылуу байланышкан системанын  $E$  ден  $E + dE$  ге чейинки аралыктагы энергияларга ээ болушкан абалдарынын санын тапкыла.
- 4.28 Энергиясы импульс менен  $\varepsilon = cp$  ( $c$ -турактуу) туюнтмасы аркылуу байланышкан системанын берилген энергияга ээ болгон абалдарынын санын тапкыла.
- 4.29 Көп бөлүкчөдөн турган системанын орточо энергиясы  $E = aT^n$  ( $n \gg 1$ ). Системанын ушул энергияга ээ болушкан абалдарынын санын тапкыла.
- 4.30 Бири-бири менен байланышпаган  $N$  сызыктуу осциллятордун системасы үчүн энтропияны жана эркин энергияны тапкыла.
- 4.31 Эки идеалдуу газдын аралашмасы үчүн Дальтондун законун келтирип чыгаргыла.
- 4.32  $N$  бир атомдуу молекулалардан турган идеалдуу газ берилген.  $T$  температурасында система каноникалык бөлүштүрүү аркылуу сүрөттөлөт деп эсептеп, анын толук энергиясынын эң ыктымалдуу маанисин тапкыла жана алынган туюнтма каноникалык

бөлүштүрүүдөгү энергиянын орточо маанисине туура келерин көрсөткүлө.

- 4.33 N айрым атомдордон турган идеалдуу больцмандык газдын энтропиясынын энергиядан жана көлөмдөн көз карандылыгын тапкыла.
- 4.34 Бирдей температураларга жана басымдарга, бирок түрдүү  $V_1$  жана  $V_2$  көлөмдөрүнө ээ болгон эки түрдүү газ аралашкан учурдагы энтропиянын өзгөрүшүн тапкыла.
- 4.35 Көлөмү  $V_1$  ден  $V_2$  ге чейин изотермикалык түрдө өзгөртүлгөн газдын үстүнөн аткарылган жумушту тапкыла.
- 4.36 Бир атомдуу идеалдуу газдын термодинамикалык потенциалын эсептегиле.

## 5. Реалдуу газдар

- 5.1 Критикалык чекитте  $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = 0$  болору белгилүү. Бул шартты колдонуп Ван-дер-Ваальстын газынын критикалык параметрлерин тапкыла.
- 5.2 Суу буусунун критикалык параметрлерин эсептегиле. Суу буусунун молекулалары үчүн  $a = 2.03 \text{ атм} \cdot \text{м}^6 / \text{кмоль}^2$ ,  $b = 0.0183 \text{ м}^3 / \text{кмоль}$ ,  $R = 5 \cdot 10^3 \text{ Дж} / \text{кмоль} \cdot \text{К}$ .
- 5.3 Ван-дер-Ваальстын теңдемесин  $\left(\pi + \frac{3}{\omega^2}\right) \cdot (3\omega - 1) = 8\tau$  көрүнүшүндө жазууга болорун көрсөткүлө, мында  $\omega = V/V_k$ ,  $\pi = P/P_k$ ,  $\tau = T/T_k$ .
- 5.4 Ван-дер-Ваальстын газынын  $U$  энергиясын,  $C_V$  жылуулук сыйымдуулугун,  $S$  энтропиясын жана  $G$  термодинамикалык потенциалын эсептегиле.
- 5.5 Температурасы 800К жана басымы 10 атм болгон суутектин изотермикалык кысылуучулугун ( $\chi$ ) эсептегиле.  $a = 5,65 \text{ атм} \cdot \text{м}^6 / \text{кмоль}^2$ ,  $b = 0,031 \text{ м}^3 / \text{кмоль}$  деп алгыла.
- 5.6 Ван-дер-Ваальстын газынын энтропиясын ( $S$ ) жана термодинамикалык потенциалын ( $G$ ) критикалык турактуулар аркылуу туюнткула.
- 5.7 Ван-дер-Ваальстын формуласы аркылуу сүрөттөлүүчү реалдуу газ үчүн  $C_p - C_V$  ны тапкыла.
- 5.8 Жылуулук сыйымдуулугу турактуу Ван-дер-Ваальстын газы  $V_1$  көлөмүнөн боштукка,  $V_2$  көлөмүнө чейин, кеңейген кездеги температуранын өзгөрүшүн тапкыла.

5.9 Жылуулук сыйымдуулугу  $C_V$  турактуу болгон Ван-дер-Ваальстын газы үчүн адиабаттык процесстин теңдемесин тапкыла.

5.10 Реалдуу газдын абалынын теңдемесин «абалдын теңдемесин вириалдык ажыратуу» деп аталган төмөнкүдөй практикалык маанилүү формада жазууга болот:

$$\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{B_1}{V} + \frac{B_2}{V^2} + \frac{B_3}{V^3} + \dots$$

Ван-дер-Ваальстын теңдемесин коэффициенттери

$$B_1 = b - \frac{a}{RT}, \quad B_2 = b^2, \quad B_3 = b^3$$

болгон вириалдык катар түрүндө жазууга болорун көрсөткүлө.

5.11 Дитеричинин абалдар теңдемеси

$$P(V - b) = RTe^{-a/RTV}$$

көрүнүшүндө жазылат, мында  $a$  жана  $b$ — маанилери Ван-дер-Ваальстын турактууларынан айырмаланган турактуу чоңдуктар.

Критикалык чекитте Дитеричинин теңдемеси үчүн

$$V_k = 2b, \quad \frac{RT_k}{P_k T_k} = \frac{e^2}{2} = 3.69$$

катнаштары орун аларын көрсөткүлө.

5.12  $P_1 = 100 \text{ атм}$ ,  $P_2 = 1 \text{ атм}$ ,  $T_1 = 293 \text{ К}$  болгон учур үчүн Джоуль-Томсондун эффектиндеги температуранын өзгөрүшүн эсептегиле. Азот үчүн Ван-дер-Ваальстын түзөтүүлөрү  $a = 1,39 \text{ атм} \cdot \text{м}^6 / \text{кмоль}^2$ ,  $b = 0,039 \text{ м}^3 / \text{кмоль}$ .  $C_p$  энергиянын эркиндик даражасы боюнча бирдей бөлүштүрүлүү законуна баш ийет деп эсептегиле.

5.13 Критикалык областта

$$\left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \sim (T_k - T)^{-\gamma}$$

деп жазууга болот, мында  $\gamma$ — критикалык индекс. Ван-дер-Ваальстын теориясын пайдаланып  $\gamma$  ны тапкыла.

## 6. Катуу заттар. Жылуулук сыйымдуулук

6.1 Коргошундун жана алюминийдин турактуу көлөм кезиндеги салыштырма жылуулук сыйымдуулуктары  $20^\circ\text{C}$  температурада тиешелүү түрдө 126 жана 896 Дж/(кг·К). Бул металлдардын молдук жылуулук сыйымдуулуктарын ( $C_V$ ) эсептегиле жана аны Дюлонг жана Птинин законунан алынуучу мааниси менен салыштыргыла. Бул металлдар үчүн Дюлонг жана Птинин закону аткарылабы?

6.2 Металлдарда ар дайым белгилүү бир сандагы эркин электрондор болот деп эсептелет. Эгерде энергиянын эркиндик даражасы боюнча бир калыпта бөлүштүрүлүү закону аткарылат деп эсептесек, анда ар бир атомго бирден эркин электрон туура келген

- кристаллдык натрийдин атомдук жылуулук сыйымдуулугу  $4,5 R$  ге барабар болот. Бул натыйжаны кантип алууга болорун көрсөткүлө.
- 6.3 Гармоникалык термелүүнүн бир термелүү эркиндик даражасына туура келүүчү орточо кинетикалык жана орточо потенциалдык энергияларды эсептегиле.
- 6.4 Катуу нерсенин жылуулук сыйымдуулугунун маанисин Эйнштейндин теориясы боюнча эсептегиле.
- 6.5 Классикалык системанын орточо энергиясы үчүн түйөнтма 
$$\bar{E} = kT^2 \frac{d \ln I}{dT}$$
 көрүнүшүндө жазылышы мүмкүн экендигин көрсөткүлө, мында  $I$ - абалдын интегралы.
- 6.6 Жогорку температураларда, б.а.  $\frac{\theta}{T} \rightarrow 0$  умтулганда кристаллдык торчонун молдук  $C_v$  жылуулук сыйымдуулугу, Дебайдын теориясына ылайык,  $3R$  ге жетерин көрсөткүлө.
- 6.7 Төмөнкү температураларда жылуулук сыйымдуулук, Дебайдын теориясы боюнча, абсолюттук температуранын кубуна пропорциялаш болорун көрсөткүлө.
- 6.8 Атом тең салмактуулук абалынан четтеген кезде ага аракет эткен күчтөр  $f = -ax + 3\beta x^2$  болгон ангармоникалык термелүү жасоочу молекуланын узарышын эсептегиле.
- 6.9 Жездин 2 жана 1000K кезиндеги электрондук ( $C_{ve}$ ) жылуулук сыйымдуулуктарын эсептегиле жана аларды кристаллдык торчонун ошол эле температуралардагы жылуулук сыйымдуулуктары менен салыштыргыла. Жездин мүнөздүк температурасы  $\theta = 316 K$ .

## 7. Бөлүкчөлөрүнүн саны өзгөрүлмө системалар. Фазалык өтүүлөр

- 7.1 Төмөнкү термодинамикалык барабардыкты далилдегиле:  
 $d(PV) = SdT + PdV + \bar{n}d\mu$ .
- 7.2 Төмөнкү теңдештикти далилдегиле  
$$\ln \tilde{\Phi} = N \left( \frac{\partial \ln \tilde{\Phi}}{\partial N} \right)_{T,V} + V \left( \frac{\partial \ln \tilde{\Phi}}{\partial V} \right)_{T,N}.$$
- 7.3 Молекулалык массасы 4 жана турактуу көлөм кезиндеги тыгыздыгы  $0,15 \text{ г/см}^3$  болгон бозондордун идеалдуу газы үчүн Бозе-Эйнштейндин конденсациясынын температурасын баалагыла.
- 7.4  $0^\circ\text{C}$  кезинде жана 1 атм басымда муздун эрүү жылуулугу  $80 \text{ кал/г}$  барабар. Муздун жана суунун салыштырма көлөмдөрүнүн катышы

- 1,091:1,000. Басым өзгөргөндө эрүү чекитинин өзгөрүшүн баалагыла.
- 7.5 Суунун буулануу жылуулугунун температурадан көз карандылыгы  $Q = a - bT$  теңдемеси аркылуу туюнтулат, мында  $a = 764 \text{ кал/г}$ ,  $b = 0,6 \text{ кал/г.К}$ . Каныккан суу буусунун басымы  $T_1 = 80^\circ \text{C} = 353 \text{ К}$  кезинде канчага барабар?
- 7.6  $T \rightarrow 0$  умтулган кезде катуу гелийдин эрүү температурасынын басымга жараша өзгөрүшүн тапкыла.
- 7.7 Суюктуктун жана анын каныккан буусунун тең салмактуулук ийриси бойлото буунун жылуулук сыйымдуулугун (б.а суюктук дайыма өзүнүн каныккан буусу менен тең салмактуулукта болгондой жүрүүчү процесстин жылуулук сыйымдуулугун) аныктагыла. Бууну идеалдуу газ деп эсептегиле.
- 7.8 Буу дайыма өзүнүн суюктугу менен тең салмактуулукта болгондой шартта жүрүүчү процесс үчүн температурага жараша буунун көлөмүнүн өзгөрүшүн аныктагыла.
- 7.9 Клапейрон-Клаузиустун теңдемесинен Эренфесттин теңдемесин келтирип чыгаргыла.

## 8. Кванттык статистика. Ферми-Дирактын жана Бозе-Эйнштейндин бөлүштүрүүлөрү

- 8.1 Электромагниттик нурдануунун  $F, S, E, P$  термодинамикалык функцияларын эсептегиле.
- 8.2 Фотондук газдын  $C_v$  жылуулук сыйымдуулугун эсептегиле.
- 8.3 Кара нурдануунун  $C_p$  жылуулук сыйымдуулугун баалагыла.
- 8.4 Дубалдарынын температурасы  $T_1 < T$  болгон термостаттын ичинде вакуумда жайгашкан радиусу  $r$  болгон кара шардын  $T$  температурасын турактуу кармап туруучу ысыткыч кандай кубаттуулукка ээ болушу керек?
- 8.5 Планктын тең салмактуу нурдануу законунун ийриси  $\omega_m$  жыштыгында максимумга ээ. Түрдүү температуралардагы жыштыктардын  $\frac{\omega_m(T_1)}{\omega_m(T_2)}$  катышын аныктагыла.
- 8.6 Термодинамиканын экинчи башталышын колдонуп тең салмактуу электромагниттик нурдануунун энергиясынын тыгыздыгы көңдөйдүн дубалдарынын материалынан жана формасынан көз каранды болбошун көрсөткүлө.
- 8.7 Фотондук газ үчүн адиабатанын теңдемесин тапкыла.
- 8.8 Термодинамиканын методдорунун жардамында жарык басым жасарын далилдегиле.

- 8.9 Газды жогорку температурада, нурдануу менен жылуулук тең салмактуулукта турат деп эсептеп, анын басымы нурдануунун басымына барабар болгон учур үчүн газдын тыгыздыгы менен температурасынын ортосундагы байланышты тапкыла.
- 8.10 1000К температурадагы тең салмактуу нурдануунун  $1 \text{ см}^3$  көлөмүндөгү фотондордун жалпы санын тапкыла.
- 8.11. Күндү абсолюттук кара тело деп эсептеп, анын бетинин температурасын аныктагыла. Күндүн нурдануу интенсивдүүлүгүнүн максимуму спектрдин толкун узундугу  $\lambda = 5 \cdot 10^{-5} \text{ см}$  болгон жашыл областына туура келет.
- 8.12. Атом бомбасы жарылган кезде жарылуунун борборундагы температура  $10^8 \text{ К}$  ге жетет. Нурданууну тең салмактуу деп эсептеп, жарылуу болор замат борбордогу жарыктын басымын аныктагыла.
- 8.13  $E = \mu + \delta$  болсун дейли. Каалаган  $\delta$  үчүн  $f(\delta) = 1 - f(-\delta)$  катнашы орун аларын көрсөткүлө, мында  $f(\delta)$  аркылуу  $E = \mu + \delta$  учурдагы Ферминин функциясы ( $f$ ) белгиленген. Ушундай эле барабардык  $f(-\delta)$  үчүн да аткарылат. (Ферминин бөлүштүрүү функциясынын мындай касиетинин жарым өткөргүчтөрдү изилдөөдө пайдасы тийет).
- 8.14 Ферминин функциясын  $f(E) \approx e^{-\frac{E-\mu_0}{kT}}$  көрүнүшүндө жазуу  $\delta = 2kT$  жана  $\delta = 10kT$  болгон учурларда канчалык жакындаштырылган болорун аныктагыла.
- 8.15 Бөлмө температурасында ( $kT = 0.025 \text{ эВ}$ ) электрон Ферминин деңгээлинен  $0,1 \text{ эВ}$  жогору жана  $0,1 \text{ эВ}$  төмөн абалдарды ээлешинин ыктымалдыктары кандай?
- 8.16 Металлдагы электрондун Ферминин энергиясына барабар энергияга ээ болушунун ыктымалдыгы кандай?
- 8.17  $\int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{\partial f}{\partial E} \right) dE = -1$  болорун көрсөткүлө, мында  $f$  - Ферминин функциясы.
- 8.18 Ферминин деңгээлиндеги электрон менен толтуруу ыктымалдыктары  $0,20$  жана  $0,80$  болгон деңгээлдердеги электрондордун энергияларынын айырмасын ( $kT$  бирдигинде) тапкыла.
- 8.19 Температура  $1000$  ден  $300\text{К}$  чейин өзгөргөндө металлдагы Ферминин деңгээлинен  $0,1 \text{ эВ}$  ко жогору жайгашкан энергетикалык деңгээлди электрондун ээлешинин ыктымалдыгы канча эсе өзгөрөт?



- 8.20 Күмүштүн  $1\text{см}^3$  көлөмүндө  $6 \cdot 10^{22}$  даана өткөрүмдүүлүк электрондору бар деп эсептеп,  $T = 0\text{К}$  кезиндеги күмүштөгү эркин электрондордун максималдык энергиясын эсептегиле.
- 8.21 Гибстин чоң каноникалык бөлүштүрүүсүн пайдаланып, идеалдуу ферми-газдын энтропиясын толтуруунун орточо саны  $\bar{n}_i$  аркылуу туюнтула;  $\bar{n}_i \ll 1$  болгон учурду карагыла.
- 8.22 Металлдагы электрондордун  $0\text{К}$  кезиндеги максималдык энергиясын тапкыла.
- 8.23 Литий үчүн  $T = 0\text{К}$  кезиндеги Ферминин деңгээлинин эксперименталдык мааниси  $3,5$  эВко барабар. Ферминин деңгээлинин эксперименталдык жана теориялык маанилерин дал келтирүү үчүн формулага электрондун эффективдүү массасынын кандай маанисин коюу керек болот?
- 8.24 Натрийдин эркин электрондорунун концентрациясы  $2,5 \cdot 10^{28} \text{м}^{-3}$ . Ферминин температурасын жана Ферминин деңгээлиндеги электрондордун ылдамдыгын аныктагыла.
- 8.25 Муздатканда энтропиясы  $\sim T$  закону боюнча нөлгө айлануучу кубулган электрондук газ үчүн  $C_p - C_v$  айырмасынын  $T \rightarrow 0$  кездеги температурадан көз карандылыгын тапкыла.
- 8.26 Ферминин газынын төмөнкү температуралардагы энтропиясын эсептегиле.
- 8.27 Бирдик көлөмдөгү бөлүкчөлөрдүн саны алардын нормалдуу шарттардагы санына барабар деп эсептеп суутектин жана кычкылтектин кубулуу температураларын эсептегиле.
- 8.28 а) Германийдеги тыгыздыгы  $\frac{N}{V} = 10^{14} \text{см}^{-3}$  болгон эркин электрондор, б) күмүштөгү тыгыздыгы  $\frac{N}{V} = 10^{22} \text{см}^{-3}$  болгон эркин электрондор кванттык же классикалык статистикага баш ийишерин тактагыла.
- 8.29 Бөлмө температурасында кванттык статистикага баш ийишсин үчүн бирдик көлөмдөгү суутектин атомдору канчага барабар болушу керек? Мындай учурларда газдын тыгыздыгы жана басымы канчага барабар болот?
- 8.30 Кристаллдагы эркин электрондордун концентрациясы кандай болгондо андагы электрондук газдын кубулуу температурасы  $0^\circ\text{С}$  га барабар болот?
- 8.31  $T$  температурасындагы газ ээ болуучу кванттык абалдардын толук санын эсептегиле. Эгерде андагы бөлүкчөлөрдүн саны анын абалдарынын санынан кыйла аз болсо, анда

$\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{3/2} \ll n$  шарты аткарыларын көрсөткүлө.

8.32 Толук иондошкон суутектен турган жылдыздын ичиндеги электрондордун жана протондордун кубулуу температураларынын катышын тапкыла.

## 9. Флуктуациялар теориясы

9.1 Идеалдуу газдын молекулаларынын ылдамдыгынын флуктуациясынын орточо квадратын тапкыла.

9.2 Идеалдуу газдын атомунун орточо энергиясын, энергиясынын орточо квадратын жана кинетикалык энергиясынын флуктуациясынын орточо квадратын эсептегиле.

9.3 Каноникалык бөлүштүрүлгөн изотермалык системадагы энергиянын абсолюттук жана салыштырма флуктуацияларын тапкыла.

9.4 Кристаллдын энергиясынын жогорку жана төмөнкү температуралардагы салыштырма флуктуацияларын тапкыла.

9.5 Идеалдуу газдагы энергиянын салыштырма флуктуациясын эсептегиле.

9.6 Дебайдын законуна баш ийген катуу заттын толук энергиясынын орточо квадраттык четтөөсүнүн температурадан көз карандылыгын тапкыла.

9.7  $\overline{\Delta x^3} = \overline{x^3} - \overline{x^2} - 3\overline{x}(\overline{\Delta x})^2$  болорун көрсөткүлө.

9.8 Гаусстун бөлүштүрүүсү үчүн  $\overline{x^4} = 3(\overline{x^2})^2$  катнашы орун аларын көрсөткүлө.

9.9  $10^5$  К температурасында жылуулук тең салмактуулук абалында турган металлдык жездин  $10^{22}$  атомдорундагы электрондордун энергиясынын салыштырма флуктуациясын жакындаштырып баалагыла. Өткөрүмдүүлүк электрондорунун жылуулук сыйымдуулугу  $C_V \sim Nk(T/T_F)$ , кубулуу температурасы  $T_F = 10^5$  К тартибиндеги мааниге ээ.

9.10 Идеалдуу газ үчүн көлөмдүн флуктуациясы  $\overline{\Delta V^2}$  ты тапкыла.

9.11 Газ толтурулган чоң  $V$  көлөмүнө ээ идиштен кичинекей уяча (ячейка) бөлүнүп каралат. Бул уячадагы газдын тыгыздыгынын флуктуациясын эсептегиле.

9.12 Газ термометринин жардамында каттоого мүмкүн болгон температуранын пределдик кичине өзгөрүүсүн эсептегиле. Термометрде  $10^{-3}$  моль газ бар.

- 9.13 Математикалык маятниктин  $\varphi$  бурчуна флуктуациялык четтөөсүнүн орточо квадратын тапкыла.
- 9.14 Математикалык маятниктин өз алдынча термелүүлөрүндө пайда болуучу энтропиянын азаюусу эмнеге барабар?
- 9.15 Толгонуу модулу  $D=9,43 \text{ дн} \cdot \text{см}$  болгон кварц жибине асылган кичинекей күзгү  $\overline{\varphi^2} = 4,18 \cdot 10^{-6}$  болгон флуктуациялык термелүүлөрдү жасайт. Больцмандын турактуусун аныктагыла.
- 9.16 Бир жолку өлчөөдө пружиналуу таразада өлчөнүүчү пределдик кичине массаны тапкыла. Пружинанын катуулугу  $\beta$  га барабар.
- 9.17 Массасы  $m$  болгон тело айлана-чөйрөдөн энергия алып кыймылга келет. Нерсенин орточо ылдамдыгын жана  $\vartheta$  ылдамдыгы менен кыймылдаган учурдагы энтропиянын азаюусун эсептегиле.
- 9.18 Керилген кылдын чекиттеринин флуктуациялык четтөөлөрүнүн орточо квадратын тапкыла.
- 9.19 Температурасы турактуу бир тектүү системадагы көлөмдүн флуктуациясын тапкыла. Кандай шартта система туруктуу болот?
- 9.20 Көлөмү турактуу бир тектүү системадагы температуранын флуктуациясын тапкыла.
- 9.21 Энтропиясы турактуу бир тектүү системадагы басымдын флуктуациясын тапкыла. Кандай шартта система туруктуу болот?
- 9.22 Көз карандысыз өзгөрүлмөлөр катары  $V$  жана  $T$  ны колдонуп, энергиянын флуктуациясынын орточо квадратын тапкыла.
- 9.23 Кандайдыр бир каршылыкка туюкталган сыйымдуулугу  $C$  болгон конденсатордун зарядынын орточо квадратын тапкыла.
- 9.24 Температурасы  $T$  га барабар өзүнчө индукциялуу чынжырдагы токтуун орточо квадраттык четтөөсүн аныктагыла.
- 9.25 Токтун тыгыздыгынын орточо мааниси  $j = ne$  болгон термоэлектрондук эмиссия тогунун тыгыздыгынын флуктуациясын (бытыра эффекти) эсептегиле.
- 9.26 Чекиттик булактан чыгарылган чоң молекулалардан турган газдын  $T$  температурасында ички сүрүлүү коэффициенти  $\eta$  болгон суюктукка  $t$  убактысынын ичинде диффузияланышынын орточо аралыгын аныктагыла. Молекуланын радиусу  $r$  ге барабар деп алгыла.
- 9.27 Төмөнкү тажрыйбалык маалыматтарды пайдаланып Авогадронун санын аныктагыла: температурасы  $20^0 \text{ C}$  болгон глицеринде броун кыймылын жасаган гуммигуттун данчаларынын кайсы бир тандалып алынган багыттагы орточо квадраттык жылышуусу 5 минутанын ичинде  $1,4 \text{ мкм}$  ди түздү. Глицериндин илешимдүүлүгү  $\eta = 1,49 \text{ эл} / (\text{см} \cdot \text{с})$ , бөлүкчөлөрдүн радиусу  $r = 0,4 \text{ мкм}$ .

- 9.28  $300\text{K}$  кезинде кеңдиги  $500\text{ Гц}$  болгон жыштыктардын тилкеси үчүн  $\overline{E^2}/R$  катышын Найквисттин теоремасынын негизинде ватт аркылуу туюнткула.
- 9.29 Каалаган эркин кванттык абалдагы кванттык идеалдуу газдын бөлүкчөлөрүнүн санынын флуктуациясын тапкыла.
- 9.30 Кубулуу температурасына салыштырмалуу төмөнкү температурадагы электрондук газ үчүн  $\overline{(\Delta N)^2}$  ну тапкыла.
- 9.31 Оордук күчүнүн талаасындагы идеалдуу газ үчүн көлөмдүн  $\Delta V$  элементиндеги бөлүкчөлөрдүн санынын салыштырма флуктуациясы бийиктиктен кандай көз каранды болот?
- 9.32 Тең салмактуу электромагниттик нурдануунун жыштыктын  $\Delta\omega$  интервалына туура келген энергиясынын флуктуациясын тапкыла.

## **10. Тең салмаксыз процесстердин теориясынын айрым маселелери**

- 10.1 Тең салмаксыз процесстердин термодинамикасын тирүү организмдерге колдонууга болобу?
- 10.2 «Тартип» жана «хаос (баш аламандык)» түшүнүктөрүнө аныктама бергиле жана, андан пайдаланып, суюктуктун ламинардык же турбуленттик кыймылдарынын кайсынысы иреттүүрөөк (тартипсиздиги азыраак) болорун көрсөткүлө.
- 10.3 Деталдык тең салмактуулук принцибинин жардамында микроканоникалык бөлүштүрүү законун келтирип чыгаргыла.
- 10.4 Сырткы  $U(\vec{r})$  талаасы аракет эткен учурда Больцмандын кинетикалык теңдемесинин стационардык чечими болуп Максвелл-Больцмандын бөлүштүрүлүүсү эсептелерин көрсөткүлө.
- 10.5 Газдардагы ички сүрүлүү коэффициенти үчүн туюнтманы аныктагыла.
- 10.6. Кычкылтектин молекуласынын эффективдүү диаметрин болжол менен  $3 \cdot 10^{-10}$  мге барабар деп эсептеп алардын нормалдуу шарттардагы орточо эркин жол узундугун баалагыла. Бир молекуланын башка молекулалар менен  $1c$  ичиндеги кагылышууларынын орточо санын ( $\nu$ ) эсептегиле.

# МАСЕЛЕЛЕРДИН ЖООПТОРУ ЖАНА ЧЫГАРЫЛЫШТАРЫ

## 1. Статистикалык физиканын негизги түшүнүктөрү жана принциптери

1.1 Гармоникалык осциллятор үчүн Гамильтондун функциясынын (толук механикалык энергиясынын)  $H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{kq^2}{2}$  маанисин

Гамильтондун теңдемелерине коюп, төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = -kq, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}.$$

Акыркы теңдемеден  $p$  ны таап, андан убакыт боюнча туунду алалы да биринчи теңдемедеги  $\dot{p}$  нын ордуна коелу:

$$p = m\dot{q}, \quad \dot{p} = m\ddot{q}, \quad m\ddot{q} = -kq \quad \text{же} \quad \ddot{q} + \frac{k}{m}q = 0.$$

$\frac{k}{m} = \omega^2$  деп белгилеп  $\ddot{q} + \omega^2 q = 0$  теңдемесине ээ болобуз. Бул теңдеменин чечими  $q = q_0 \sin \omega t$  көрүнүшүндө болот. Анда

$$p = m\dot{q} = mq_0\omega \cos \omega t = p_0 \cos \omega t.$$

1.2  $E = \frac{p^2}{2m} = \frac{m\omega^2 q_0^2}{2} \cos^2 \omega t, \quad U = \frac{kq^2}{2} = \frac{m\omega^2 q_0^2}{2} \sin^2 \omega t,$

$$\overline{\cos^2 \omega t} = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2 \omega t dt = \frac{1}{2}.$$

Демек,  $\bar{E} = \bar{U} = \frac{m\omega^2 q_0^2}{4}.$

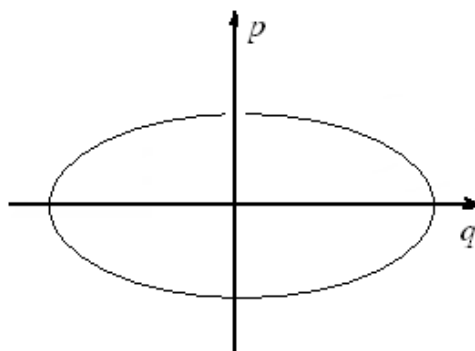
1.3 1.1-маселени чыгарууда алынган натыйжаларды пайдаланабыз. Гармоникалык осциллятордун фазалык ийрисинин параметрдик теңдемеси

$$\left. \begin{aligned} q &= q_0 \sin \omega t \\ p &= p_0 \cos \omega t \end{aligned} \right\}$$

Бул теңдемелерден убакытты чыгаралы.  $\sin^2 \omega t + \cos^2 \omega t = 1$  болорун эске алып, жарым октору  $q_0$  жана  $p_0$  болгон эллипстин теңдемесине ээ болобуз:

$$\frac{q^2}{q_0^2} + \frac{p^2}{p_0^2} = 1.$$

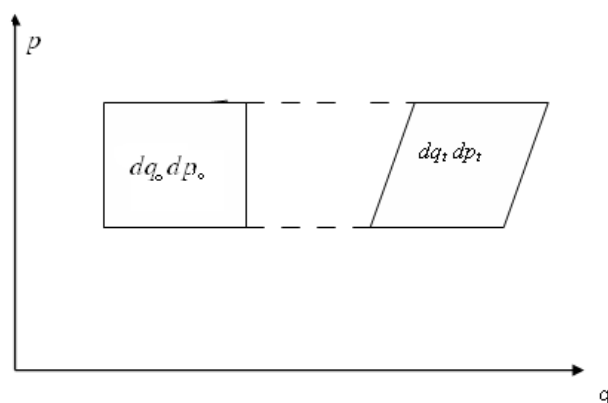
Демек, гармоникалык осциллятордун фазалык траекториясы  $p, q$  – тегиздигинде эллипс түрүндө болот.



37-сүрөт

- 1.4 Мындай чекиттин абалын  $p, q$  – тегиздигинде көрсөтөлү. Убакыттын кайсы бир моментиндеги чекиттин абалы фазалык мейкиндиктин көлөмүнүн  $dp_0 dq_0$  элементи аркылуу сүрөттөлсүн дейли. Изилденүүчү материалдык чекит инерция боюнча кыймылдагандыктан ( $p = m\dot{q} = \text{const}$ ) убакыттын өтүшү менен бул фазалык көлөмдүн бардык чекиттери  $q$  огуна жарыш которулушат жана  $p$  координатасы канчалык чоң болсо, которулуу ошончолук көп болот. Ошондуктан фазалык көлөмдүн тик бурчтуу элементи убакыттын өтүшү менен параллелограмм көрүнүшүн алат, бирок, фазалык көлөмдүн элементинин чоңдугу өзгөрбөйт:

$$dp_0 dq_0 = dp_e dq_e$$



38-сүрөт

- 1.5 Мындай система үчүн фазалык мейкиндик төрт өлчөмдүү болот. Фазалык көлөмдүн сакталуу шарты  $d\mathcal{Q}_1 d\mathcal{Q}_2 dx_1 dx_2 = d\mathcal{Q}'_1 d\mathcal{Q}'_2 dx'_1 dx'_2$  көрүнүшүндө жазылат.  $dx_1 dx_2 = dx'_1 dx'_2$  болгондуктан  $d\mathcal{Q}_1 d\mathcal{Q}_2 = d\mathcal{Q}'_1 d\mathcal{Q}'_2$ .
- 1.6  $Ox$  огун тик жогору көздөй багыттап алалы.  $q = x$ ,  $h$  - чекиттин баштапкы бийиктиги,  $g$  - эркин түшүүнүн ылдамдануусу болсун. Мындай чекиттин толук механикалык энергиясы

$$H = \frac{p^2}{2m} + mgx,$$

анда

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -mg,$$

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}.$$

Мындан

$$p = m\dot{x}$$

$$\dot{p} = m\ddot{x} = -mg$$

же  $\ddot{x} + g = 0$ .

Бул теңдеменин чечими  $x = h - \frac{gt^2}{2}$  көрүнүшүндө болот.

Мындан  $\dot{x} = -gt, \quad t = \sqrt{\frac{2(h-x)}{g}}$ .

Демек  $p = m\dot{x} = -mgt = -m\sqrt{2g(h-x)}$ .

1.7  $g(\varepsilon) = \int dg = \int dx dy dz dp_x dp_y dp_z = V \int dp_x dp_y dp_z$ .

$$\int dp_x dp_y dp_z = \frac{4\pi}{3} p_0^3$$

Релятивисттик бөлүкчө үчүн  $p = mc$  жана  $\varepsilon = mc^2 = \frac{m^2 c^2}{m} = \frac{p^2}{m}$ ,

мындан  $p = \sqrt{m\varepsilon}$ . Анда  $p_0 = \sqrt{m\varepsilon_0}$ . Маселенин шарты боюнча  $\varepsilon = \varepsilon_0 + mc^2$ ,

демек,  $p_0 = \sqrt{m(\varepsilon - mc^2)} = \sqrt{m\varepsilon - m^2 c^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{c^2} \varepsilon - m^2 c^2} = \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{c^2} - m^2 c^2}$ .

Акырында  $g(\varepsilon) = \frac{4\pi}{3} V \left( \frac{\varepsilon^2}{c^2} - m^2 c^2 \right)^{3/2}$ .

1.8 Фотон массасы  $m = 0$  болгон релятивисттик бөлүкчө катары каралат. 1.7 -маселенин чыгарылышынан берилген интервалдагы энергияларга туура келген фазалык көлөм

$$dg(\varepsilon) = \frac{\partial g(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = \frac{4\pi V \varepsilon^2}{c^3} d\varepsilon$$

Фотондун спининин мүмкүн болгон эки ориентациясын эске алсак, анда

$$d\xi(\varepsilon) = 2 \cdot \frac{dg}{(2\pi\hbar)^3} = 2 \cdot \frac{4\pi V \varepsilon^2}{(2\pi\hbar)^3 c^3} d\varepsilon = \frac{V \varepsilon^2}{\pi^2 \hbar^3 c^3} d\varepsilon$$

1.9 Мындай осциллятордун фазалык траекториясы эллипс түрүндө, ал эми фазалык мейкиндиги эки өлчөмдүү болот. Демек, анын энергиясы  $\varepsilon$  дон кичине болгон бардык кыймыл абалдарына жарым октору  $q_0$  жана  $p_0$  болгон эллипстин аянты туура келет:

$$g(\varepsilon) = \pi \cdot q_0 p_0$$

Классикалык осциллятордун энергиясы анын термелүү амплитудасы менен

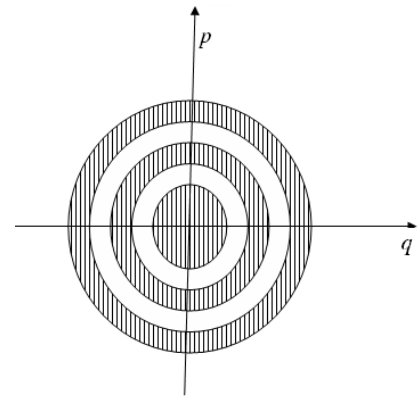
$$\varepsilon = \frac{kq^2}{2} = \frac{m\omega^2 q_0^2}{2} \quad \text{формуласы аркылуу}$$

байланышарын эске алсак, анда

$$q_0 = \frac{1}{\omega} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} \quad \text{жана} \quad p_0 = m\omega q_0 = \sqrt{2\varepsilon m}$$

Демек, осциллятордун энергиясы 0 дон  $\varepsilon$  го чейинки бардык абалдарына туура келүүчү фазалык мейкиндигинин көлөмү

$$g(\varepsilon) = \frac{2\pi\varepsilon}{\omega}$$



39-сүрөт

Осциллятордун энергиясынын  $\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right); \quad n = 0, 1, 2, \dots$

квантталуу эрежесин пайдаланып 1 кванттык абалга туура келген фазалык көлөмдү табууга болот.

$$\varepsilon_n = \hbar\omega\left(n + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega \cdot n + \frac{1}{2}\hbar\omega \quad ,$$

$$n = \frac{\varepsilon - \frac{1}{2}\hbar\omega}{\hbar\omega} = \frac{2\varepsilon - \hbar\omega}{2\hbar\omega} \quad .$$

Анда 
$$\tau = \frac{g(\varepsilon)}{n} = \frac{2\pi\varepsilon}{\omega n} = \frac{2\pi\varepsilon \cdot 2\hbar\omega}{\omega(2\varepsilon - \hbar\omega)} = \frac{2\pi\hbar}{1 - \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon}}$$

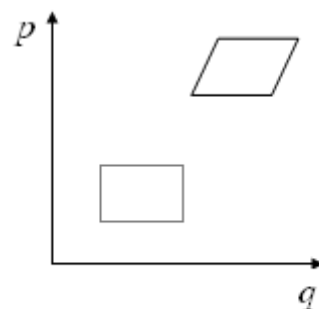
$\varepsilon \gg \hbar\omega$  болгон учурларда  $\tau \approx 2\pi\hbar$ .

Түрдүү кванттык абалдарга туура келген «фазалык көлөмдөр» осциллятордун фазалык мейкиндигин зоналарга бөлөт.

- 1.10 1.6-маселеде алынган оордук күчүнүн талаасында кыймылдаган материалдык чекиттин импульсу менен координатасынын  $p = -m\sqrt{2g(h-x)}$  байланыш формуласын  $t = t_0$  моментинде  $q = q_0$ ,  $p = p_0 \neq 0$  болгудай өзгөртүп  $p^2 - p_0^2 = -2m^2g(q_0 - q)$  көрүнүшүндө жаза алабыз.

Демек, чекиттин фазалык траекториясы чокусу  $q$  огунда жаткан параболаны берет.

Чиймеден  $\Delta p_0 \Delta q_0 = \Delta p_t \Delta q_t$  болорун, б.а фазалык чекиттердин көлөмү сакталарын (Лиувилдин теоремасы) көрүүгө болот.



40-сүрөт

## 2. Ыктымалдыктар теориясынын элементтери жана анын айрым колдонулуштары

- 2.1 Бөлүкчөнүн кыймылынын теңдемеси

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \quad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \quad .$$

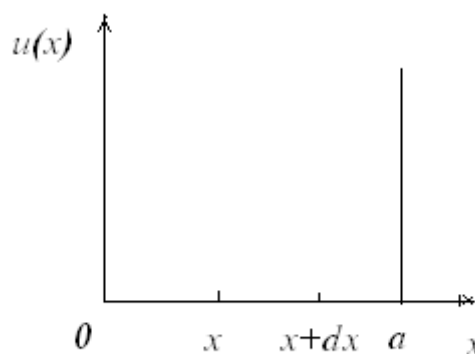
Потенциалдык чуңкурдун ичинде

$$0 < x < a, \quad H = \frac{p^2}{2m} \quad (41-сүрөт)$$

Демек,  $\dot{p} = 0$ ,  $\dot{q} = \frac{p}{m}$ . Айталы,

$$q \equiv x, \quad \text{анда} \quad \dot{x} = \frac{p}{m}, \quad \dot{p} = 0, \quad \ddot{x} = 0.$$

Потенциалдык чуңкурда бөлүкчө турактуу ылдамдык менен кыймылдайт деп айтууга болот.



41-сүрөт



Бөлүкчөнүн  $(x, x + dx)$  интервалында болуу ыктымалдыгы

$$dw = \frac{dt(x)}{T} = \frac{2 \frac{dx}{g}}{T}, \quad \text{мында } T = \frac{2a}{g}. \quad \text{Ордуна койсок, анда}$$

$$dw = \rho(x)dx = \frac{1}{a} dx, \quad \int_0^a dw = \int_0^a \rho(x)dx = \int_0^a \frac{1}{a} dx = 1,$$

б.а ыктымалдык бирге нормалаштырылганын көрөбүз.

## 2.2 Бөлүкчөнүн толук энергиясы

$$E = H = \frac{p^2}{2m} + \frac{kx^2}{2}, \quad q \equiv x \quad \text{болсун. Анда кыймыл теңдемелери}$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -kx, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{p}{m}, \quad \text{мындан} \quad \ddot{x} = \frac{\dot{p}}{m}, \quad \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{же}$$

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \text{мында } \omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Бул теңдеменин чечими  $x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$

көрүнүшүндө болот. Айталы  $t = 0$  убакыт моментинде  $x(0) = -a$ ,

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \text{болсун дейли. Анда} \quad x = -a \cos \frac{2\pi}{T} t = -a \cos \omega t.$$

Бөлүкчөнүн  $[x, x + dx]$  интервалында болушунун ыктымалдыгы

$$dw = \frac{dt(x)}{T}, \quad dt(x) = \frac{2dx}{g(x)},$$

$$g(x) = \dot{x} = a\omega \sin \omega t = \omega(a \sin \omega t) = \omega \sqrt{a^2 - a^2 \cos^2 \omega t} = \omega \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\text{Анда} \quad dw = \frac{2dx}{T\omega \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{2\omega dx}{2\pi\omega \sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}} dx.$$

2.3 Эгерде жарым мезгил ичинде чекит өзүнүн мүмкүн болгон абалдарынын бардыгында жок дегенде бир жолу болуп чыгат деп эсептесек, анда материалдык чекиттин  $Ox$  огундагы чексиз кичине  $dx$  кесиндисинде болуу ыктымалдыгы  $dw(x)$  анын бул кесиндиде өткөргөн убакыты  $dt$ нын термелүүлөрдүн жарым мезгилине болгон катышы аркылуу аныкталат:

$$dw(x) = \frac{dt}{T/2}. \quad T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{ал эми} \quad dt = \frac{dx}{g}.$$

$$\text{Чекиттин ылдамдыгы} \quad g = |\dot{x}| = a\omega |\sin \omega t| = \omega \sqrt{a^2 - x^2}.$$

$$\text{Анда} \quad dw(x) = \frac{dx}{\pi \sqrt{a^2 - x^2}}.$$

2.4  $x$  чоңдугу  $w(x_1), w(x_2), \dots$  ыктымалдыктары менен  $x_1, x_2, \dots$  маанилерин, ал эми  $y$  чоңдугу  $w(y_1), w(y_2), \dots$  ыктымалдыктары менен  $y_1, y_2, \dots$  маанилерин алган дискреттүү чоңдуктардын учурун карайлы.  $w(x_i, y_k)$  – бир убакта бир чоңдуктун  $x_i$  жана экинчи чоңдуктун  $y_k$  мааниси байкалышынын ыктымалдыгы болсун дейли.

Орточонун аныктоосу боюнча

$$\begin{aligned} \overline{x+y} &= \sum_{i,k} (x_i + y_k) w(x_i, y_k) = \sum_i \sum_k x_i w(x_i, y_k) + \sum_i \sum_k y_k w(x_i, y_k) = \\ &= \sum_i x_i \sum_k w(x_i, y_k) + \sum_k y_k \sum_i w(x_i, y_k). \end{aligned}$$

$y$  өзгөрүлмөнүн каалаган маанисинде  $x$  өзгөрүлмөсүнүн  $x_i$  маанисинин байкалышынын ыктымалдыгы

$$w(x_i) = \sum_k w(x_i, y_k).$$

Ошондой эле  $y$  үчүн  $w(y_k) = \sum_i w(x_i, y_k)$ .

Мындан

$$\begin{aligned} \sum_i x_i \sum_k w(x_i, y_k) &= \sum_i x_i w(x_i) = \bar{x}, \\ \sum_k y_k \sum_i w(x_i, y_k) &= \sum_k y_k w(y_k) = \bar{y}, \end{aligned}$$

демек,  $\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}$

- 2.5 Далилдөө көз карандысыз чоңдуктар үчүн ыктымалдыктардын көбөйтүндүсү жөнүндөгү теоремага таянып жүргүзүлөт:

$$\overline{xy} = \sum_i \sum_k x_i y_k w(x_i, y_k) = \sum_i \sum_k x_i y_k w(x_i) w(y_k) = \sum_i x_i w(x_i) \sum_k y_k w(y_k) = \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

- 2.6 Бөлүкчөлөр бири-биринен көз карандысыз болушкандыктан  $n$  бөлүкчөнүн  $p$  абалында болушунун ыктымалдыгы  $p^n (1-p)^{N-n}$  ге барабар. Ал эми каалагандай эркин  $n$  бөлүкчөнү жалпы  $N$  бөлүкчөдөн бөлүп тандап алуунун жолу  $N$  ден  $n$  боюнча топтоштуруулардын саны  $C_N^n$  ге барабар. Ошондуктан эркин тандап алынган  $n$  бөлүкчөнүн бир убакта  $p$  – абалда болушунун толук ыктымалдыгы үчүн

$$w_N(n) = C_N^n p^n (1-p)^{N-n} = \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n (1-p)^{N-n}$$

көрүнүшүндөгү биномиалдык бөлүштүрүүгө ээ болобуз.

- 2.7 Каалаган санды туура табуунун ыктымалдыгы  $\frac{1}{49}$  га барабар. 2.6-маселедеги биномиалдык бөлүштүрүүнү пайдаланып 49 дан үч жана алты санды туура табуунун ыктымалдыктары үчүн

$$w_{49}(3) = \frac{49!}{46!3!} \left(\frac{1}{49}\right)^3 \left(\frac{48}{49}\right)^{46} \approx 0,06,$$

$$w_{49}(6) = \frac{49!}{43!6!} \left(\frac{1}{49}\right)^6 \left(\frac{48}{49}\right)^{43} \approx 0,000416 \quad \text{га ээ болобуз.}$$

- 2.8 а)  $w_N(n) = \frac{N!}{(N-n)!n!} p^n (1-p)^{N-n}$  туюнтмасын изилдейли.  $N \gg n$  болгон

учур үчүн

$$w_N(n) \cong \frac{N!}{n!(N-n)!} p^n (1-p)^N = \frac{N(N-1)\dots(N-n+1)}{n!} p^n (1-p)^N = \frac{(\bar{n})^n}{n!} \left(1 - \frac{\bar{n}}{N}\right)^N,$$

мында  $\bar{n} = pN$  -  $p$  - абалындагы бөлүкчөлөрдүн орточо саны.  
 $N \rightarrow \infty$  кезде

$$w(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} w_N(n) = \frac{(\bar{n})^n e^{-\bar{n}}}{n!} .$$

Бул туюнтма Пуассондун бөлүштүрүүсү деген атка ээ.

б) Эми  $N$  гана эмес,  $n$  да өтө чоң болсун. Бул шарт  $\bar{n}$  жана  $n$  дер өтө чоң (бирге салыштырганда) сандар, ал эми  $n - \bar{n} \ll n$  дегенди билдирет. Пуассондун бөлүштүрүүсүн логарифмалап жана Стирлингдин  $\ln n! \cong n \ln n - n$  жакындаштырылган формуласын пайдаланып

$w(n) = \text{conste} \frac{(n-\bar{n})^2}{2n^2}$  туюнтмасына ээ болобуз. Мындагы турактуу чоңдук нормалаштыруу шартынан табылат.  $N$  өтө чоң сан болгондуктан суммалоону интегралдоого алмаштыра алабыз:

$$dw(n) = w(n)dn = \rho(n)dn = \frac{1}{\sqrt{2\pi n^2}} e^{-\frac{(n-\bar{n})^2}{2n^2}} dn .$$

Мына ошентип, ыктымалдыктардын нормалдык (гаусстук) бөлүштүрүүсүнө ээ болдук.

2.9 Оюн сөөгүнүн каалаган цифрасынын түшүшүнүн ыктымалдыгы  $\frac{1}{6}$  ге барабар.  $N=5$  жана  $n=1$  учуру үчүн биномиалдык бөлүштүрүүдөн пайдаланып:

а)  $w(1) = \frac{5!}{1!4!} \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0,4;$

б)  $w = 5 \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{6};$

в)  $w(2) = \frac{5!}{2!3!} \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{2}{5} \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0,161 .$

2.10 Бир убакта  $k_1$  жана  $k_2$  элементтеринин иштен чыгуу ыктымалдыгы

$$w_{k_1 k_2} = w_{k_1} \cdot w_{k_2} = 0,2^2 .$$

Анда алардын оң абалынын ыктымалдыгы  $q_{k_1 k_2} = 1 - w_{k_1 k_2} = 1 - 0,2^2 .$

Ал эми  $q_k = 1 - w_k = 1 - 0,3 .$

$k$  элементинин да,  $k_1$  жана  $k_2$  элементтеринин да бузулбашынын (оң абалынын) ыктымалдыгы  $q = q_k \cdot q_{k_1 k_2} = (1 - 0,3)(1 - 0,2^2) .$

Анда электр чынжырынын үзүлүшүнүн ыктымалдыгы

$$p = 1 - q = 1 - (1 - 0,3)(1 - 0,2^2) = 0,328 .$$

2.11  $T$  убактысынын ичинде  $k$ -блоктуң иштен чыкпашынын (оң абалда болушунун) ыктымалдыгы  $q_k = 1 - w_k$ . Анда ошол эле убакыт ичинде блоктордун бирөөсүнүн да бузулбашынын ыктымалдыгы

$$q = \prod_{k=1}^n q_k = \prod_{k=1}^n (1 - w_k).$$

Анда жок дегенде бир блоктуң бузулушунун ыктымалдыгы

$$w = 1 - q = 1 - \prod_{k=1}^n (1 - w_k).$$

2.12 Тело айланганда бурчтардын  $d\varphi$  интервалында болуп калышынын ыктымалдыгы  $dw_\varphi = \rho d\varphi$ .

$$\int dw = \int \rho d\varphi = \rho \cdot 2\pi = 1 \quad \text{нормалаштыруу} \quad \text{шартынан}$$

$$\rho = \frac{1}{2\pi}.$$

2.13 Системанын ыктымалдыктарынын бөлүштүрүлүшү  $dw = cxydx dy$ . Пропорциялаштык коэффициенти  $c$  нын маанисин нормалаштыруу шартынан аныктайбыз:

$$w = \int_0^a \int_0^b cxydx dy = \frac{a^2}{2} \frac{b^2}{2} c = 1,$$

$$c = \frac{4}{a^2 b^2}, \quad \text{анда} \quad dw = \frac{4}{a^2 b^2} xydx dy.$$

2.14 Ыктымалдыкты нормалаштыруунун шартынан турактуу чоңдуктун маанисин аныктайбыз:

$$w = \text{const} \int_0^\infty e^{-\alpha x} dx = \text{const} \left( -\frac{1}{\alpha} e^{-\alpha x} \right) \Big|_0^\infty = \frac{\text{const}}{\alpha} = 1,$$

$$\text{const} = \alpha, \quad \text{демек} \quad dw(x) = \alpha e^{-\alpha x} dx \quad \text{же}$$

$$dw(y) = \alpha e^{-\alpha y^2} d(y^2) = 2\alpha e^{-\alpha y^2} y dy.$$

2.15 Оюн сөөгүн ыргытканда 1,2,3,4,5 жана 6 упайдын түшүшү мүмкүн. Ар бир окуянын ыктымалдыгы  $\frac{1}{6}$  ге барабар. Анда оюн сөөгүн

бир жолу ыргытканда түшүүчү упайлардын орточо саны  $n = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{1}{6} + 5 \cdot \frac{1}{6} + 6 \cdot \frac{1}{6} = 3,5$ .

2.16 Өзгөрүлмөнүн  $x$  тен  $x + dx$  ке чейинки аралыктагы маанилерине ээ болушунун ыктымалдыгы  $dw = \rho dx$ . Пропорциялаштык коэффициенти  $\rho$  ну аныктайлы:

$$\int dw = \int_a^b \rho dx = \rho(b - a) = 1, \quad \text{мындан} \quad \rho = \frac{1}{b - a}. \quad \text{Демек,} \quad dw = \frac{1}{b - a} dx,$$

анда

$$\bar{x} = \int_a^b \frac{1}{b - a} x dx = \frac{b^2 - a^2}{2} \cdot \frac{1}{b - a} = \frac{a + b}{2},$$

$$\overline{x^2} = \int_a^b \frac{1}{b-a} x^2 dx = \frac{b^3 - a^3}{3} \cdot \frac{1}{b-a} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

2.17 Дисперсиянын аныктоосу боюнча  $\overline{\Delta x^2} = \int_a^b (x - \bar{x})^2 f(x) dx$ .

Интеграл астындагы туюнтманы өзгөртүп түзөлү

$$\begin{aligned} \overline{\Delta x^2} &= \int_a^b (x^2 - 2x\bar{x} + \bar{x}^2) f(x) dx = \int_a^b x^2 f(x) dx - 2\bar{x} \int_a^b x f(x) dx + \bar{x}^2 \int_a^b f(x) dx = \\ &= \overline{x^2} - 2\bar{x}\bar{x} + \bar{x}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2. \end{aligned}$$

$\overline{x^2}$  жана  $\bar{x}^2$  тын маанилерин алдыңкы маселеден алып ордуна коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$\overline{\Delta x^2} = \frac{(a-b)^2}{12}.$$

2.18 Пуассондун  $w(n) = \frac{a^n e^{-a}}{n!}$  бөлүштүрүүсү кокустук чоңдуктун маанисинин  $n$  ге барабар болушунун ыктымалдыгын көрсөтөт. Ал нормалаштыруу шартын канааттандыраарын текшерүү үчүн  $n$  дин нөлдөн чексиздикке чейинки бардык маанилеринин ыктымалдыктарын суммалап чыгуу зарыл:

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n e^{-a}}{n!} = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^{-a} (1 + \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \dots + \frac{a^k}{k!}) = e^{-a} e^a = 1.$$

2.19 Кокустук чоңдуктун орточо мааниси

$$\bar{x} = \bar{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{na^n e^{-a}}{n!} = e^{-a} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{na^n}{n!} = e^{-a} (\frac{a}{1!} + \frac{2a^2}{2!} + \frac{3a^3}{3!} + \dots + \frac{ka^k}{k!}) = e^{-a} e^a \cdot a = a.$$

2.20 Кокусунан бузулуучу элементтердин саны  $n$  Пуассондун  $w(n) = \frac{a^n}{n!} e^{-a}$  законуна баш ийет деп эсептесек, анда  $a = Nw(1) = 2000 \cdot 0,0005 = 1$ . Аппаратурада жок дегенде бир элементтин бузулушунун, демек, аппараттын иштебей калышынын ыктымалдыгы

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} w(n) = 1 - e^{-a} = 1 - e^{-1} \approx 0,63.$$

2.21  $x$  чоңдугунун орточо мааниси  $\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} x e^{-\alpha x^2} dx = 0$ ,

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha^3}} = \frac{1}{2\alpha}.$$

$$(\overline{\Delta x})^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = \frac{1}{2\alpha}.$$

2.22 Кеменин тик абалынан орточо кыйшаюсу

$$\bar{x} = \frac{1}{a^2} \int_0^{\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2a^2}} dx. \quad \text{Өзгөрүлмөлөрдү алмаштыралы:} \quad \frac{x}{a\sqrt{2}} = t.$$

Анда

$$\bar{x} = 2\sqrt{2} \cdot a \int_0^{\infty} t^2 e^{-t^2} dt = 2\sqrt{2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} a = a\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

### 3. Термодинамиканын негиздери. Термодинамикалык функциялар

- 3.1 Басым күчтөрүнө каршы аткарылган элементардык жумуш  $\delta A = PdV$ .  $P = const$  кезинде жумуш  $A = P(V_2 - V_1)$ , мында  $V_1$  жана  $V_2$  - тиешелүү түрдө бир моль суунун жана бир моль буунун көлөмдөрү.  $V_2 \gg V_1$  болгондуктан

$$A = PV_2 = P \frac{RT}{P} = RT = 2 \cdot 373 \text{ кал} = 3125,7 \text{ Дж.}$$

1 моль суунун буулануу жылуулугу

$$Q = \lambda \cdot m = 539 \cdot 18 \approx 40632 \text{ Дж.}$$

( $\lambda$ -бууга айлануунун салыштырма жылуулугу, суу үчүн 539 кал/г барабар).  $A$  га караганда кыйла чоң болгон ( $Q - A$ ) энергиясы суюктукту бууга айландыруу үчүн анын молекулаларынын ортосундагы ички байланыш күчтөрүнө каршы жумуш аткарууга сарпталат.

- 3.2 Идеалдуу газ үчүн термодинамиканын биринчи закону

$$\delta Q = C_V dT + PdV.$$

$$C = const \quad \text{жана} \quad P = \frac{RT}{V} = \frac{(C_P - C_V)T}{V}$$

$$CdT = C_V dT + \frac{C_P - C_V}{V} TdV \quad \text{же} \quad (C - C_V)dT - \frac{C_P - C_V}{V} TdV = 0$$

Барабардыктын эки тарабын тең  $T(C - C_V)$  га бөлөлү

$$\frac{dT}{T} - \frac{C_P - C_V}{C - C_V} \frac{dV}{V} = 0 \quad \text{же} \quad \frac{dT}{T} + \frac{C_P - C_V}{C_V - C} \frac{dV}{V} = 0.$$

Интегралдап  $TV^{n-1} = const$  алабыз, мында  $n-1 = \frac{C_P - C_V}{C_V - C}$ .

$T = \frac{PV}{R}$  болорун эске алып ордуна койсок

$$\frac{PV \cdot V^{n-1}}{R} = const \quad \text{же} \quad PV^n = const, \quad \text{мында} \quad n = \frac{C_P - C}{C_V - C}.$$

- 3.3  $\delta A = \delta Q - dU = \frac{m}{M} CdT - \frac{m}{M} C_V dT = \frac{m}{M} (C - C_V) dT$ .

Политроптук процесстин  $C$  жылуулук сыйымдуулугун политропа көрсөткүчү  $n$  аркылуу туюнталы.

$$n = \frac{C_p - C}{C_v - C}, \quad \text{мындан} \quad C - C_v = \frac{C_p - C_v}{1 - n} = \frac{R}{1 - n}.$$

$$\text{Анда} \quad A = \frac{m}{M} \frac{R}{1 - n} \int_{T_1}^{T_2} dT = \frac{m}{M} \frac{R}{1 - n} \Delta T.$$

- 3.4 Газ политроптук түрдө кеңейгендиктен  $P_1 V_1^n = P_2 V_2^n$  же  $4V^n = (3V)^n$ , мындан политропа көрсөткүчү  $n = \frac{\ln 4}{\ln 3} = 1,26$ .

Политроптук процесстин жумушу

$$A = \int_{V_1}^{V_2} P dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\text{const}}{V^n} dV = \frac{\text{const}}{1 - n} \left| V^{1-n} \right|_{V_1}^{V_2} = \frac{P_2 V_2 - P_1 V_1}{1 - n} = \frac{1}{0,26} (4 \cdot 5 \cdot 10^4 - 15 \cdot 10^4) = 1884540 \text{ Дж.}$$

Политроптук процесстеги жылуулук саны  $Q = mc(t_2 - t_1)$ , мында  $m$  – газдын массасы,  $c$  – политроптук салыштырма жылуулук сыйымдуулук. Аны политропа көрсөткүчү аркылуу туюнталы.

$$n = \frac{C_p - C}{C_v - C},$$

$$\text{мындан} \quad C = C_v \frac{n - \gamma}{n - 1}.$$

$$\text{Анда} \quad Q = m C_v (t_2 - t_1) \frac{n - \gamma}{n - 1}.$$

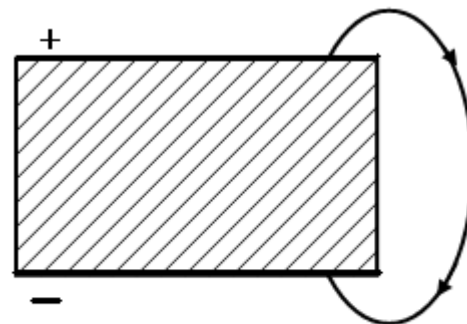
Бирок,  $m C_v (t_2 - t_1) = \Delta U$  – газдын ички энергиясынын өзгөрүшү болгондуктан, термодинамиканын биринчи ( $\Delta U = Q - A$ ) законун пайдаланып,  $Q = (Q - A) \frac{n - \gamma}{n - 1}$  деп жаза алабыз. Мындан ( $\gamma = 1,4$ )

$$Q = A \frac{\gamma - n}{\gamma - 1} = 157,4 \text{ ккал,}$$

$$\Delta U = Q - A = -293 \text{ ккал.}$$

Газдын кеңейүү жумушу ага жылуулук берүүнүн жана анын ички энергиясынын азайышынын эсебинен аткарылат.

- 3.5 Обкладкаларынын арасы диэлектрик менен толтурулган жалпак конденсатордон турган системаны карайлы (42-сүрөт). Обкладкаларды өткөргүч менен туташтырып  $dq$  чексиз кичине зарядына бир пластинкадан экинчисине өтүүгө мүмкүндүк берели. Бул учурда зарядды которуу боюнча



42-сүрөт

$\delta A = -\Delta\varphi dq$  жумушу аткарылат, мында  $\Delta\varphi = El$ ,  $E$ -талаанын чыңалышы,  $l$ -обкладкалардын арасындагы аралык. Конденсатордун заряды  $q$ , обкладкалардын аянты  $S$  болсун, анда электрдик индукция

$$D = \sigma = \frac{q}{S}$$

Заряд өзгөргөндө индукция да өзгөрөт:

$$dD = \frac{dq}{S}.$$

Мындан  $\delta A = -\ell SE dD$ .

Диэлектриктин бирдик көлөмүнө тиешелүү жумуш

$$\delta \tilde{A} = -EdD.$$

Алынган формуланы эркин бир тектүү эмес чөйрөгө жалпылайлы:

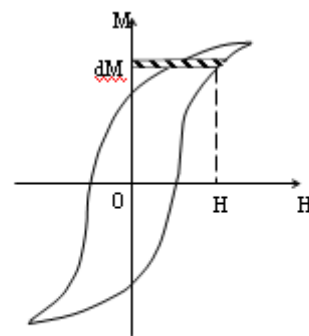
$$\delta \tilde{A} = -\vec{E}d\vec{D}.$$

3.6 Магниттелүүнүн ( $J$ ) ферромагнетиктеги магнит талаасынын чыңалышынан көз карандылыгы  $H, J$ -диаграммасында гистерезис ийриси аркылуу сүрөттөлөт (43-сүрөт).

Өзөкчөнүн бирдик көлөмүн магниттештирүүнүн элементардык жумушу  $\delta A = -HdJ$  бул диаграммада штрихтелген аянтча түрүндө көрсөтүлгөн. Анда өзөкчөнүн бирдик көлөмүн кайра-кайра магниттештирүүнүн жумушу

$$A = -\oint H dJ = -S$$

б.а  $H, J$ -диаграммасындагы гистерезис ийрисинин илмегинин аянтына (минус белгиси менен) барабар.



43-сүрөт

3.7 Термодинамиканын жоболоруна ылайык абалдын термикалык теңдемеси  $A = A(T, a)$ ,

мындан  $dA = \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_T da + \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_a dT$ .

$dA = 0$  кезинде  $\left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_T \left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_A + \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_a = 0$

жана  $\left(\frac{\partial T}{\partial A}\right)_a \left(\frac{\partial A}{\partial a}\right)_T \left(\frac{\partial a}{\partial T}\right)_A = -1$ .

Эгерде  $A = P$  жана  $a = V$  болсо, анда

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -1.$$

3.8 Жумуштун жалпы термодинамикалык  $\delta A = PdV + xdy$  туюнтмасын жазып алалы, мында  $x=0$  жана  $y=P$  болсун. Эгерде  $\delta A$  толук дифференциал болсо, анда



$\left(\frac{\partial P}{\partial y}\right)_V = \left(\frac{\partial x}{\partial V}\right)_y = 0$  болушу керек эле. Эгерде  $y = P$  десек, анда

$1=0$  ду алабыз, демек,  $\delta A$  толук дифференциал эмес.

- 3.9 Төмөн түшүүчү муздак аба массасынын же тоо массивдериндеги шамалдын аракетинин натыйжасында жогору көтөрүлгөн аба, басымы төмөн катмарга өтүп, кеңейет. Аба жылуулукту начар өткөргөндүктөн бул кеңейүүнү адиабаттык деп эсептөөгө болот. Адиабаттык процессте

$$TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = const,$$

мындан логарифмалагандан жана дифференциалдагандан кийин

$$\frac{dT}{T} + \frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{dP}{P} = 0$$

гө ээ болобуз. Экинчи жактан, басымдын бийиктикке жараша өзгөрүшү

$$dP = -\rho g dh,$$

мында  $\rho$  – абанын тыгыздыгы.

Идеалдуу газдын абалынын теңдемесинен

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{MP}{RT},$$

ошондуктан

$$\frac{dP}{P} = -\frac{Mg}{RT} dh$$

жана

$$\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Mg}{R}.$$

Аба үчүн  $\gamma = 1,4$ ;  $M = 0,029$  кг / моль, анда атмосферадагы температуранын бийиктиктик коэффициенти

$$\frac{dT}{dh} = -9,8 \cdot 10^{-5} \text{ град} / \text{см} \approx -0,01 \text{ К} / \text{м}.$$

Чондуктун бул мааниси абанын температурасынын бийиктикке жараша өзгөрүшүнүн байкалуучу орточо маанисинен (ар бир 200 м ге 1К) бир кыйла чоң. Бул айырмачылык, негизинен, абанын нымдуулугун эсепке албагандыгыбыз менен аныкталат (биз абаны кургак деп эсептегенбиз). Кайсы бир температурада аба нымга каныкса, температуранын андан ары төмөндөшү менен суу бууларынын конденсациясы башталат да конденсация жылуулугу бөлүнүп чыгат. Ошол себептен абанын температурасынын төмөндөшү, жогорудагы формуладагыга караганда жайыраак жүрөт.

Абанын жогору көтөрүлүүчү агымы адиабаттык муздап, бийиктикке жараша температуранын төмөндөшүнө алып келет.

Натыйжада, абанын агымдарын жогору көздөй кыймылдоого аргасыз кылган тоолордун этектеринде суу бууларынын конденсацияланышынын эсебинен көп өлчөмдө жаан жаайт. Бул кубулуш нымдуу деңиз шамалдарынын жолунда жаткан бардык тоо кыркаларында (Альп, Гималай ж.б.) байкалат. Бул шамалдар тоо кыркаларын ашып өтүп, кайрадан төмөн түшкөндүктөн, адиабаттык кысылып, ысышат. Ошондуктан бул жерлерде абанын салыштырма нымдуулугу дайыма төмөн.

Мына ошентип, жогору көтөрүлүүчү аба адиабаттык кеңейип, муздайт, ал эми ылдый түшүүчү аба адиабаттык кысылып, ысыйт. Натыйжада, абанын үстүңкү катмарлары анын ылдыйкы катмарларына караганда төмөнүрөөк температурага ээ болот.

3.10 Мындай процесстин болушу мүмкүн, бирок термодинамиканын экинчи башталышына ылайык ал компенсация менен да байланышкан. Жылуулукту жумушка айландырууда компенсация деп жылуулуктун бир бөлүгүнүн муздаткычка берилишин гана түшүнбөстөн, процесс туюк (айланма) болбогон учурларда жумушчу заттын абалынын өзгөрүшүн да түшүнүү керек. Мисалы, ички энергиясы көлөмдөн көз каранды болбогон идеалдуу газ учурунда, изотермалык процессте ысыткычтан алынган жылуулук толугу менен жумушка айланат. Мындай процессте компенсация деп газдын көлөмүнүн өзгөрүшүн түшүнөбүз. Эгерде биз бул өзгөрүүнү жок кылып, газды баштапкы көлөмүнө чейин кысалы десек, анда ысыткычтан алынган жылуулукту кайра берип, мурда аткарылгандай чоңдуктагы жумушту биз аткарууга туура келет.

3.11 Бул тажрыйба экинчи законго каршы келбейт жана бул законду көрсөтмөлүү түшүндүрүү үчүн Дарлинг тарабынан атайын ойлоп табылган.

Анилиндин тамчысынын кыймылы төмөнкүдөй түшүндүрүлөт: Стакан ысыганда анилин, жылуулуктан сууга караганда көбүрөөк кеңейгендиктен, андан жеңил боло калып, суунун бетине калкып чыгат; бул жерде абага жылуулугун берген анилин муздап, кайрадан суудан оор боло түшөт да, стакандын түбүнө чөгөт. Андан кийин бул процесс толугу менен кайталанат. Муну – ысыткычы кум мончосу, ал эми муздаткычы - аба болгон жылуулук кыймылдаткычынын бир түрү деп карасак болот.

3.12

$$\delta Q = dU + PdV = C_v dT + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] dV,$$

$$TdS = dU + PdV,$$

$$T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P.$$

Анда  $\delta Q = C_v dT + T \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV$ .

Максвеллдин  $\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V$  катышынан пайдалансак, анда

$$\delta Q = C_v dT + T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV$$

Бирок,  $\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{\alpha}{\beta}$ , ошондуктан

$$\delta Q = C_v dT + \frac{T\alpha}{\beta} dV.$$

Адиабаттык процессте  $\delta Q = 0$ .

$$dT = -\frac{T\alpha}{C_v\beta} dV.$$

Мындан суу  $\alpha < 0$  болгон  $0^\circ C < t < 4^\circ C$  интервалында адиабаттык кысылганда ( $dV < 0$ ) муздашын ( $dT < 0$ ) көрүүгө болот.

3.13

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dU + PdV}{T} = \frac{m}{M} C_v \frac{dT}{T} + \frac{P}{T} dV = \frac{m}{M} C_v \frac{dT}{T} + \frac{m}{M} R \frac{dV}{V} = \frac{m}{M} \left( C_v \frac{dT}{T} + R \frac{dV}{V} \right)$$

Анда  $S = \frac{m}{M} (C_v \ln T + R \ln V) + const.$

$$3.14 \quad S = \int \frac{dU + PdV}{T} = \int \frac{C_v dT + T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV}{T} = \int \frac{C_v dT}{T} + \int \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V dV.$$

$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$  тендемесинен  $\left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V = \frac{R}{V-b}$ , ошондуктан

$$S = \int \frac{C_v dT}{T} + R \ln(V-b) + S_0.$$

$C_v$  температурадан дээрлик көз каранды болбогондуктан

$$S = C_v \ln T + R \ln(V-b) + S_0.$$

Адиабаттык процессте  $S = const$ , ошондуктан

$$T(V-b)^{R/C_v} = const.$$

$$3.15 \quad dS = dS_1 + dS_2 = mc \int_{T_1}^{\theta} \frac{dT}{T} + mc \int_{T_2}^{\theta} \frac{dT}{T} = mc \ln \frac{\theta}{T_1} + mc \ln \frac{\theta}{T_2} = mc \ln \frac{\theta^2}{T_1 T_2}.$$

Маселеде  $\theta = \frac{T_1 + T_2}{2}$  болгондуктан  $dS = mc \ln \frac{(T_1 + T_2)^2}{4T_1 T_2} > 0$ ,

Демек,  $dS > 0$ .

- 3.16 Чындыкка ылайык бөлмөдөгү абанын басымын сырттагы басымга барабар деп алалы. Басым турактуу кезде ысытылган аба кеңейип, анын кыйла көп бөлүгү бөлмөдөн чыгып кетет. Натыйжада, бөлмөнү ысытканда, андагы абанын ички энергиясы жана энтропиясы азайып кетерин, ал эми бөлмөгө сырттан киргизилген муздак нерсе аны менен кошо кирген муздак абанын энергиясынын эсебинен ысышын көрөбүз. Нерсе менен кошо бөлмөдөгү аба да энергиясын жогорулатат.

Бөлмөнү ысытууда абанын бирдик массасына берилүүчү энергия

$$u - u_0 = C_V(T - T_0),$$

Ал эми бул массанын энтропиясынын өзгөрүшү

$$s - s_0 = C_p \ln \frac{T}{T_0}$$

болгондуктан абанын бирдик көлөмүнүн энергиясы жана энтропиясы тиешелүү түрдө

$$u_1 = \rho u = C_V \rho T + \rho(u_0 - C_V T_0)$$

жана

$$s_1 = \rho s = C_p \rho \ln T + \rho(s_0 - C_p \ln T_0).$$

Абалдын теңдемесинен абанын тыгыздыгын таап  $\rho = \frac{PM}{RT}$ ,

бул теңдемелерге койсок, анда

$$u_1 = \frac{C_V MP}{R} + \frac{MP(u_0 - C_V T_0)}{RT},$$

$$s_1 = \frac{C_p MP}{RT} + \frac{MP(s_0 - C_p \ln T_0)}{RT}.$$

Акыркы эки туюнтмадан бөлмөдөгү абанын ички энергиясы жана энтропиясы, аны ысытканда азайышарын көрүүгө болот. От жакканда бөлмөгө киргизилген энергия анын дубалдарынын көңдөйчөлөрү аркылуу сыртка чыгып кетет. Мына ошентип, кышында бөлмөлөргө аларда белгилүү бир температураны кармап туруу үчүн гана от жагылат. Мында энергиянын көбөйүшү эмес, энтропиянын азайышы пайдаланылат.

- 3.17 Бул эки телонун жалпы энтропиясы

$$\Delta S = \frac{1}{300} - \frac{1}{301} = \frac{1}{9} \cdot 10^{-4} \text{ эрг/град ка өзгөрөт.}$$

Больцмандын принцибине ылайык

$$\Delta S = k \ln \frac{W_2}{W_1},$$

мында  $W_1$  – эки нерсенин баштапкы абалынын ыктымалдыгы,  $W_2$  – алардын каралган процесстеги акыркы абалынын ыктымалдыгы. Ошондуктан

$$W_2 = W_1 e^{\Delta S/k} = W_1 e^{10^{-4}/9.1,38 \cdot 10^{-16}} = W_1 e^{10^{12}/12},$$

б.а акыркы абалдын ыктымалдыгы баштапкы абалдын ыктымалдыгынан эбегейсиз көп эсе ашып түшөт, ошондуктан нерселерди бириктиргенде дээрлик бардык учурларда жылуулук ыссык нерседен муздак нерсеге өтөт.  $W_2/W_1 \approx 1000^{10^{10}}$  учурдун орто эсеп менен бирөөсүндө жылуулук муздак нерседен ыссык нерсеге өтөт. Жылуулуктун өтүшүнүн термодинамика талап кылган ыктымалдыгы чындыктан эч бир айырмаланбай тургандыгын көрөбүз.

Бирок, 1 эрг ден бир кыйла аз жылуулук санынын өтүүсү үчүн натыйжа башкача болот.  $\Delta Q = 1,2 \cdot 10^{-9}$  эрг болгон учурда

$$\frac{W_2}{W_1} = e = 2,7,$$

б.а мындай жылуулук санынын муздак нерседен ыссык нерсеге өтүүсү, ага тескери процеске караганда бир топ сейрек учураганы менен, бул өтүүлөрдүн жыштыгы бири-бирине жакын.

### 3.18 Негизги термодинамикалык барабардыктан

$$dS = \frac{1}{T} dU + \frac{P}{T} dV.$$

$V$  жана  $T$  өзгөрүлмөлөрүнө өтөлү.

$$dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT + \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T dV$$

$$dS = \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right] dV + \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT.$$

Анда

$$\text{Мындан} \quad \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \frac{1}{T} \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T + P \right]; \quad \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = \frac{1}{T} \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V.$$

Экинчи тартиптеги аралаш туундуларын таап, аларды өз ара барабарлап төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P.$$

### 3.19 Системанын абалынын термикалык жана калорикалык теңдемелеринин байланыш формуласынан (3.18 маселени кара) пайдаланалы:

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P.$$

Ван-дер-Ваальстын теңдемесинен басымды таап, андан турактуу көлөм кезинде температура боюнча туундусун алып ордуна коелу:

$$P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2},$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b},$$

Анда 
$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{R}{V-b}\right) - \frac{RT}{V-b} + \frac{a}{V^2} = \frac{a}{V^2}.$$

3.20 
$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -\frac{a}{V^2} + \frac{RT}{V-b} = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}.$$

$$U = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln Z. \quad F = -kT \ln Z,$$

мындан 
$$\ln Z = -\frac{F}{kT} = -\frac{C_V}{k}(1 - \ln T) + \frac{a}{kTV} + \frac{R}{k} \ln(V-b).$$

Анда

$$\begin{aligned} U &= kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \left\{ -\frac{C_V}{k}(1 - \ln T) + \frac{a}{kTV} + \frac{R}{k} \ln(V-b) \right\} = kT^2 \left\{ \frac{C_V}{k} \frac{\partial}{\partial T} (\ln T - 1) - \frac{a}{kV} \cdot \frac{1}{T^2} \right\} = \\ &= kT^2 \left\{ \frac{C_V}{k} \frac{1}{T} - \frac{a}{kT^2V} \right\} = C_V T - \frac{a}{V}; \end{aligned}$$

Демек, 
$$U = C_V T - \frac{a}{V}.$$

3.21 Эгерде  $dF = X(x, y)dx + Y(x, y)dy$  туюнтмасы толук дифференциал болсо, анда

$$X = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y, \quad Y = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x \quad \text{жана} \quad \left(\frac{\partial X}{\partial y}\right)_x = \left(\frac{\partial Y}{\partial x}\right)_y.$$

Демек,  $dU = TdS - PdV$  туюнтмасынан 
$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = -\left(\frac{\partial P}{\partial S}\right)_V.$$

Ал эми  $d(U - TS) = dU - TdS - SdT = -PdV - SdT$  туюнтмасынан

$$\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_V = -\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T \quad \text{ж.б.у.с алабыз.}$$

3.22 Термодинамиканын биринчи башталышын  $\delta Q = C_V dT + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dV$

көрүнүшүндө жазып алалы.

Мындан 
$$\frac{\delta Q}{dT} = C_V + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \frac{dV}{dT}. \quad P = \text{const} \quad \text{болсун, анда}$$

$$\frac{\delta Q}{dT} = C_p \quad \text{жана} \quad C_p = C_V + T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p. \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \text{ ны}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = -1 \quad \text{шартынан таап ордуна коюп, төмөнкүнү}$$

алабыз:

$$C_p - C_v = -T \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} = -T \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T} = \frac{\alpha^2 V_0 T}{\beta},$$

мында  $\alpha = \frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$  – көлөмдүк кеңейүү коэффициенттери,

$\beta = -\frac{1}{V_0} \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T$  – изотермалык кысылуучулук.

Талданган бул чечим бизди кызыктырган катнашты алуунун бир нече жолдорунун бири болуп эсептелет. Бул маселени чыгаруунун дагы бир жолун карап көрөлү.

Термодинамиканын биринчи башталышы боюнча

$$\delta Q = dU + PdV$$

же  $CdT = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + PdV$

изохоралык процессте  $C_v dT_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT$ , мындан  $C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V$

изобаралык процессте  $C_p dT_p = \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV_p + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT_p + PdV_p$

мындан  $C_p - C_v = \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right] \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ .

### 3.23 Кайрылуучу процесс үчүн

$$dF = d(U - TS) = dU - TdS - SdT = TdS - PdV - TdS - SdT = -PdV - SdT,$$

мындан  $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$  жана  $P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$

Мына ошентип,  $F = \int SdT = \int_{T_0}^T R \frac{V_0}{V} \left(\frac{T}{T_0}\right)^a dT = R \frac{V_0 T_0}{V(a+1)} \left[1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{a+1}\right],$

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = R \frac{V_0 T_0}{V^2(a+1)} \left[1 - \left(\frac{T}{T_0}\right)^{a+1}\right].$$

### 3.24 а) А жана В абалдарын байланыштыруучу кайсы бир кайрылуучу R жана кайрылбас I процесстерин карайлы.

R процесси үчүн барабардыктын тууралыгы энтропиянын аныктоосунан эле келип чыгат:

$$\left[ S(A) - S(B) \equiv \int_B^A \frac{\delta Q}{T} \right].$$

I процессинен жана Rге тескери

болгон процесстен турган циклдик процесс үчүн Клаузиустун  $\left(\oint \frac{\delta Q}{T} \leq 0\right)$  теоремасынын негизинде



44-сүрөт

$$\int_I \frac{\delta Q}{T} - \int_R \frac{\delta Q}{T} \leq 0 \quad \text{же} \quad \int_I \frac{\delta Q}{T} \leq \int_R \frac{\delta Q}{T} \equiv S(B) - S(A) \quad \text{болорун көрөбүз.}$$

б) Жылуулук изоляцияланган система айлана чөйрө менен жылуулук алмашпайт. Ошондуктан мындай системадагы ар кандай процесс үчүн  $\delta Q = 0$ . Жогорудагы чечимди пайдаланып,  $S(B) - S(A) \geq 0$ , б.а мындай системанын энтропиясы эч качан азайбастыгын көрөбүз.

### 3.25 Термодинамиканын биринчи

$$\delta Q = dU + PdV = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T dV + PdV \quad \text{жана экинчи}$$

$$\frac{\delta Q}{T} = dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV \quad \text{закондорунун формулаларынан}$$

$$\frac{\left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right] dV}{T} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T dV$$

$$\text{Мындан} \quad \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V, \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right].$$

Энтропиядан алынуучу аралаш туундулар

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} \quad \text{өз ара барабар болушкандыктан}$$

$$\frac{\partial}{\partial V} \left\{ \frac{1}{T} \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V \right\} = \frac{\partial}{\partial T} \left\{ \frac{1}{T} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right] \right\}$$

Акыркы барабардыктын сол жагы нөлгө барабар, демек оң жагы да нөл болушу керек:

$$-\frac{1}{T^2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T + P\right] + \frac{1}{T} \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = 0.$$

$$\text{Мындан} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \left[ T \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \right].$$

$$\text{Идеалдуу газ үчүн} \quad P = \frac{RT}{V} \quad \text{жана} \quad \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V}.$$

Буларды жогорудагы теңдемеге койсок,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_T = \left( T \frac{R}{V} - P \right) = (P - P) = 0,$$

б.а идеалдуу газдын ички энергиясы анын көлөмүнөн көз каранды болбойт, температуранын гана функциясы болуп эсептелет. Ушундай эле жол менен идеалдуу газдын ички энергиясы басымдан да көз каранды болбой тургандыгын көрсөтүүгө болот.

### 3.26 Катнаштардын тууралыгы системанын жылуулук сыйымдуулугунун теңдемелеринен келип чыгат:



$$C_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V, \quad \left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = T \frac{\partial}{\partial V} \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = T \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V,$$

анткени  $\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T = \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V,$

$$C_P = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P, \quad \left( \frac{\partial C_P}{\partial P} \right)_T = T \frac{\partial}{\partial P} \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_P = T \frac{\partial}{\partial T} \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = -T \left( \frac{\partial^2 V}{\partial T^2} \right)_P$$

анткени  $\left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T = - \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P$

3.27 Алдыңкы мисалда чыгарылган  $\left( \frac{\partial C_V}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V$  туюнтмасынан пайдаланалы.  $U$  температуранын гана функциясы болгондуктан  $C_V = C_V(T)$  болот. Ошондуктан  $\left( \frac{\partial^2 P}{\partial T^2} \right)_V = 0$ , демек,  $P = Tf(V)$ .

3.28 Маселенин шарты боюнча  $PV = f(T)$  жана  $U = U(T)$ .

Термодинамиканын негизги  $dS = \frac{dU + PdV}{T}$  теңдемесинен

$$\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_T = T \left( \frac{\partial P}{\partial T} \right)_V - P$$

ны алабыз (3.18- маселени кара). Акыркы

теңдемени  $V$  га көбөйтөлү.

$$\frac{Tdf(T)}{dT} - f(T) = 0.$$

Интегралдагандан кийин  $f(T) = \text{const} \cdot T$  га ээ болобуз. Демек, абалдын теңдемеси  $PV = AT$  көрүнүшүндө болот, мында  $A$  - турактуу чоңдук.

3.29 Заттын бирдик массасы үчүн  $dU = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V dT = g(T)dT,$

мында  $g(T)$   $T$  дан гана көз каранды.  $dU = TdS - PdV$

барабардыгынан  $TdS = g(T)dT + PdV$ . Анда  $C_V = T \left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V = g(T)$ .

3.30 Якобиандын касиеттеринен пайдаланып төмөнкүгө ээ болобуз.

$$\left( \frac{\partial T}{\partial V} \right)_S = \frac{\partial(T, S)}{\partial(V, S)} = \frac{\frac{\partial(T, S)}{\partial(T, V)}}{\frac{\partial(V, S)}{\partial(T, V)}} = \frac{\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T}{-\frac{\partial(V, S)}{\partial(V, T)}} = - \frac{\left( \frac{\partial S}{\partial V} \right)_T}{\left( \frac{\partial S}{\partial T} \right)_V}.$$

3.31 Маселени чечүү үчүн

$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_S = \frac{C_P}{C_V} \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T$$

теңдемесинен пайдаланабыз. (3.26)- маселесин

чыгаруудагы талкуулоолорду бир аз өзгөрткөндө алынуучу

$$C_p = C_v - T \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T < 0, \quad C_p > C_v \text{ катнаштарын эске алып,}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_S \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \text{ болорун көрөбүз.}$$

3.32  $S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$  болгондуктан

$$\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = -\frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -\frac{\partial^2 F}{\partial V \partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left(-\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V.$$

3.33  $C_p = \left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_P$  туюнтмасынан пайдаланабыз, анда

$$H = \int C_p dT + f(P) = \int \alpha T^3 \ln P dT + f(P) = \frac{\alpha T^4}{4} \ln P + f(P).$$

$$\frac{\partial H}{\partial P} = V \text{ шартынан } \frac{\alpha T^4}{4P} + f'(P) = V = \frac{\beta T^4}{P}.$$

$$\text{Мындан } f'(P) = 0 \text{ жана } H = H_0 + \frac{\alpha T^4}{4} \ln P.$$

3.34 Идеалдуу газдын абалынын теңдемесинен

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V dT + \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T dV \quad \text{же} \quad dP = \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \frac{P}{P} dT - \left[\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \frac{V}{V}\right] dV,$$

$$dP = \beta P dT - \frac{\chi}{V} dV.$$

$$P = \text{const}, \quad \bar{\text{б.а}} \quad dP = 0 \quad \text{кезинде} \quad P = \frac{\chi}{V\beta} \left(\frac{dV}{dT}\right)_P = \frac{\chi\alpha}{\beta}.$$

3.35  $\left(\frac{\partial T}{\partial P}\right)_S = \frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P} = \frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P} = \frac{T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{C_p} = \frac{T\alpha V}{C_p},$

мында  $\alpha$  - көлөмдүк кеңейүү коэффициенти.

3.36 Турактуу басым кезиндеги энтропиянын өзгөрүшү

$$(dS)_P = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_P dV = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_P dV.$$

$$T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P = C_p, \quad \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \cdot \frac{1}{V} = \alpha \text{ болгондуктан} \quad dS_P = \frac{C_p}{T} \frac{dV}{\alpha V}.$$

#### 4. Статистикалык физиканын газдардын касиеттерин окуп үйрөнүүгө колдонулуштары.

##### Максвелл-Больцмандын бөлүштүрүүсү

4.1  $g \div g + \Delta g$  интервалындагы ылдамдыктарга ээ болушкан молекулалардын салыштырма саны

$$\frac{\Delta n}{n} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} g^2 e^{-\frac{mg^2}{2kT}} \Delta g,$$

$$\frac{\Delta n}{n} = 1,09 \cdot 10^{-2} \approx 1,1\% .$$

4.2 Ылдамдыгынын проекциялары  $g_x \div g_x + \Delta g_x$  интервалында жаткан молекулалардын саны

$$\Delta n = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mg_x^2}{2kT}} \Delta g_x,$$

ал эми салыштырма саны 
$$\frac{\Delta n}{n} = \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mg_x^2}{2kT}} \Delta g_x .$$

$$\frac{\Delta n}{n} \approx 2,89 \cdot 10^{-4} .$$

Ылдамдыгынын модулу  $g \div g + \Delta g$  интервалында жаткан молекулалардын салыштырма саны

$$\frac{\Delta n}{n} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{\frac{3}{2}} g^2 e^{-\frac{mg^2}{2kT}} \Delta g , \quad \frac{\Delta n}{n} \approx 3,32 \cdot 10^{-4} .$$

4.3 Бир тектүү бир атомдуу газдар үчүн колдонулуучу талкуулоолордун негизинде төмөнкүлөрдү жазып алууга болот:

$$\left. \begin{aligned} n_1(g_1^2)n_2(g_2^2) &= n_1(g_3^2)n_2(g_4^2), \\ m_1g_1^2 + m_2g_2^2 &= m_1g_3^2 + m_2g_4^2; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$\left. \begin{aligned} n_1(g_1^2)n_1(g_2^2) &= n_1(g_3^2)n_1(g_4^2), \\ g_1^2 + g_2^2 &= g_3^2 + g_4^2; \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$\left. \begin{aligned} n_2(g_1^2)n_2(g_2^2) &= n_2(g_3^2)n_2(g_4^2), \\ g_1^2 + g_2^2 &= g_3^2 + g_4^2; \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

мында  $g_1, g_2$  - молекулалардын кагылышууга чейинки жана  $g_3, g_4$  - кагылышуудан кийинки ылдамдыктары.

(1)- теңдемелер өз ара кагылышуучу эки түрдүү молекулалар үчүн кагылышуулардын санынын жана энергиянын балансын (сакталышын) көрсөтөт, ал эми (2) жана (3) – теңдемелер тиешелүү түрдө биринчи жана экинчи түрдөгү молекулалардын кагылышууларын мүнөздөйт. (1)-(3)-теңдемелерден

$$\frac{1}{n_1} \frac{dn_1}{dg_1^2} = \frac{1}{n_2} \frac{dn_2}{dg_2^2} \cdot \frac{m_2}{m_1} .$$

(2) жана (3)-теңдемелерден

$$n_1 = A_1 e^{-\alpha g^2} \quad (\alpha = const \cdot m_1)$$

$$n_2 = A_2 e^{-\beta g^2} \quad (\beta = const \cdot m_2) .$$

Демек, аралашмадагы эки газ тең Максвеллдин бөлүштүрүүсүнө баш ийишет.

4.4 Чондуктун орточо маанисинин аныктоосу боюнча

$$\left(\overline{\frac{1}{g}}\right) = \int_0^{\infty} \frac{1}{g} dw = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{m g^2}{2kT}} g dg.$$

$$\int_0^{\infty} e^{-\frac{m g^2}{2kT}} g dg = \frac{1}{2} \frac{2kT}{m} = \frac{kT}{m} \text{ болгондуктан}$$

$$\left(\overline{\frac{1}{g}}\right) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{kT}{m} = \sqrt{\frac{2m}{\pi kT}}.$$

4.5 Ылдамдыгынын  $x$ -чи компоненти  $0 \leq g_x \leq g_x^0$  интервалында жаткан бөлүкчөлөрдүн саны

$$n_{0 \leq g_x \leq g_x^0} = n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{1/2} \int_0^{g_x^0} e^{-\frac{m g_x^2}{2kT}} dg_x.$$

Чен бирдиксиз  $x = \frac{g_x}{\sqrt{\frac{2kT}{m}}}$  чоңдугун киргизели. Анда

$$n_{0 \leq g_x \leq g_x^0} = \frac{n}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_0} e^{-x^2} dx.$$

$erf(x_0) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_0} e^{-x^2} dx$  теңдемеси аркылуу аныкталуучу функция каталардын интегралы деп аталат, анын чоңдугу тиешелүү таблицадан табылат. Мына ошентип,

$$n_{0 \leq g_x \leq g_x^0} = \frac{n}{2} erf\left(\frac{g_x^0}{\sqrt{\frac{2kT}{m}}}\right).$$

4.6 Ылдамдыктары  $g$  дан  $g + dg$  га чейинки интервалдагы маанилерге ээ болушкан молекулалардын саны  $dn = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} g^2 e^{-\frac{m g^2}{2kT}} dg$ .

Ылдамдыктары эң ыктымалдуу ылдамдыктан чоң болгон молекулалардын санын табуу үчүн бул туюнтманы  $g_{\text{бы}}$  дан чексиздикке чейин интегралдоо зарыл:

$$n(g \geq g_{\text{бы}}) = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_{g_{\text{бы}}}^{\infty} g^2 e^{-\frac{m g^2}{2kT}} dg = 4\pi n \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \left[ \int_0^{\infty} g^2 e^{-\frac{m g^2}{2kT}} dg - \int_0^{g_{\text{бы}}} g^2 e^{-\frac{m g^2}{2kT}} dg \right].$$

Ал эми мындай молекулалардын үлүшү (салыштырма саны):

$$\frac{n(g \geq g_{\text{бы}})}{n} = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{2kT}{m}\right)^{3/2} - 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{g_{\text{бы}}} g^2 e^{-\frac{m g^2}{2kT}} dg =$$

$$= 1 - 4\pi \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \int_0^{g_{\text{бы}}} g^2 e^{-\frac{m g^2}{2kT}} dg.$$

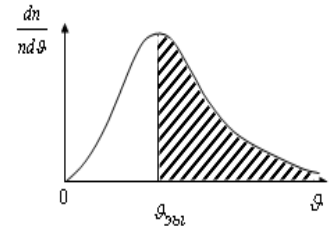
Белгилөөлөрдү киргизели:  $\frac{m g^2}{2kT} = x^2$ ,  $g^2 = \frac{2kT}{m} x^2$ ,  $g dg = \frac{2kT}{m} x dx$ .

Анда 
$$\frac{n(\vartheta \geq \vartheta_{\text{эбт}})}{n} = 1 - 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^1 \left( \frac{2kT}{m} \right)^{3/2} x^2 e^{-x^2} dx = 1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 x^2 e^{-x^2} dx.$$

Бөлүктөп интегралдоонун натыйжасында акыркы интеграл каталардын интегралына келтирилет:

$$\frac{n(\vartheta \geq \vartheta_{\text{эбт}})}{n} = 1 - \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[ -\frac{x e^{-x^2}}{2} \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-x^2} dx \right] = 1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-1} - \text{erf}(1),$$

$$\frac{n(\vartheta \geq \vartheta_{\text{эбт}})}{n} = 0,57 = 57\%.$$



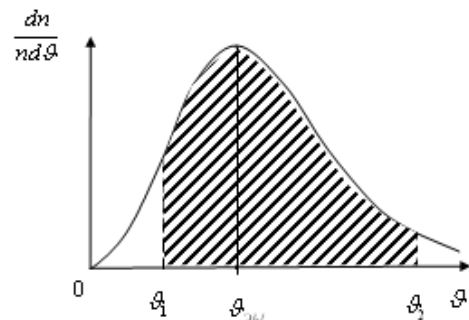
45-сүрөт

Графикте (45-сүрөт) бул чоңдук штрихтелген фигуранын аянтына барабар.

4.7 Маселени графикалык түрдө талдап алалы (46-сүрөт).

$$\vartheta_1 = \frac{\vartheta_{\text{эбт}}}{2}, \quad \vartheta_2 = 2\vartheta_{\text{эбт}}.$$

Анда ылдамдыктары  $\vartheta_1$  ден  $\vartheta_2$  ге чейинки интервалдагы маанилерге ээ болгон молекулалардын үлүшү



46-сүрөт

$$\frac{\Delta n}{n} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left[ \int_0^{\vartheta_2} \vartheta^2 e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}} d\vartheta - \int_0^{\vartheta_1} \vartheta^2 e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}} d\vartheta \right].$$

Чен бирдиксиз  $\frac{m\vartheta^2}{2kT} = x^2$  чоңдугун киргизели, анда

$$\vartheta d\vartheta = \frac{kT}{m} 2x dx, \quad \vartheta = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \cdot x,$$

$$\frac{\Delta n}{n} = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \left( \frac{2kT}{m} \right)^{3/2} \left( \int_0^2 x^2 e^{-x^2} dx - \int_0^{1/2} x^2 e^{-x^2} dx \right) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left( \int_0^2 x^2 e^{-x^2} dx - \int_0^{1/2} x^2 e^{-x^2} dx \right).$$

Бөлүктөп интегралдоо менен бул интегралдарды каталардын интегралдарына өткөрөлү

$$\begin{aligned} \frac{\Delta n}{n} &= \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[ -\frac{x e^{-x^2}}{2} \right]_0^2 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^2 e^{-x^2} dx + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{x e^{-x^2}}{2} \right]_0^{1/2} - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{0.5} e^{-x^2} dx = \\ &= -\frac{4e^{-4}}{\sqrt{\pi}} + \text{erf}(2) + \frac{4}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}} - \text{erf}(0.5) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{1}{\sqrt{e}} - \frac{4}{e^4} \right) + \text{erf}(2) - \text{erf}(0.5), \end{aligned}$$

$$\frac{\Delta n}{n} = 87\%.$$

4.8 Бирдик көлөмдөгү, ылдамдыктары  $\vartheta_x \div \vartheta_x + d\vartheta_x$ ,  $\vartheta_y \div \vartheta_y + d\vartheta_y$ ,

$\vartheta_z \div \vartheta_z + d\vartheta_z$  интервалдарында жаткан молекулалардын саны  
 $dn = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}} d\vartheta_x d\vartheta_y d\vartheta_z$  формуласы менен аныкталары  
 белгилүү. Декарттык координаттардагы ылдамдыктардын  
 «көлөмүнүн»  $d\vartheta_x d\vartheta_y d\vartheta_z$  элементин сферикалык координаттардагы  
 «көлөмдүн»  $\vartheta^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\vartheta$  элементине алмаштыралы. Анда  
 $dn = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}} \vartheta^2 \sin \theta d\theta d\varphi d\vartheta$ .

Берилген ылдамдыкка ээ болгон жана 1с ичинде идиштин  
 бетинин  $1 \text{ см}^2$  на жетүүчү молекулалардын саны

$$d\nu = \vartheta \cos \theta dn = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \vartheta^3 \sin \theta \cos \theta d\theta d\varphi d\vartheta.$$

Ал эми ылдамдыктары  $\vartheta \div \vartheta + d\vartheta$  интервалында жаткан жана  
 идиштин бетине каалагандай бурч менен урунуучу  
 молекулалардын саны

$$\begin{aligned} d\nu' &= n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \vartheta^3 e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}} d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta = \\ &= n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \vartheta^3 e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}} d\vartheta \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{2} = n\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \vartheta^3 e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}} d\vartheta \end{aligned}$$

$\theta$  бурчу боюнча интеграл 0 дөн  $\pi/2$  ге чейин алынат, анткени  $\theta > \pi/2$   
 болгондо молекулалар дубалдан алысташат.

4.9 Бирдик көлөмдөгү ылдамдыгынын компоненти  $\vartheta_x$  (калган эки  $\vartheta_y$   
 жана  $\vartheta_z$  компоненттери каалагандай маанилерди алуучу) болгон  
 молекулалардын саны

$$dn_{\vartheta_x} = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m\vartheta_x^2}{2kT}} d\vartheta_x \int_{-\infty}^{\infty} \int e^{-\frac{m}{2kT}(\vartheta_y^2 + \vartheta_z^2)} d\vartheta_y d\vartheta_z = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} e^{-\frac{m\vartheta_x^2}{2kT}} d\vartheta_x.$$

Ал эми көлөмү сан жагынан  $\vartheta_x$  ке барабар болгон  
 параллелепипеддеги молекулалардын саны

$$d\nu = \vartheta_x dn_{\vartheta_x} = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \vartheta_x e^{-\frac{m\vartheta_x^2}{2kT}} d\vartheta_x$$

Анда 1 с ичинде идиштин  $1 \text{ см}^2$  на урунушкан молекулалардын  
 жалпы саны

$$\nu = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^{\infty} \vartheta_x e^{-\frac{m\vartheta_x^2}{2kT}} d\vartheta_x = n \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \cdot \frac{2kT}{2m} = n \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}} = \frac{n}{4} \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} = \frac{n\bar{\vartheta}}{4}.$$

4.10  $dt$  убактысынын ичинде  $S$  тешигинен агып чыккан  
 молекулалардын саны

$$dN = \sum_{\vartheta_x > 0} n(\vartheta) S \cdot \vartheta_x dt.$$

Демек, молекулалардын тешиктен агып чыгуу тездиги

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= nS \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \int_0^\infty d\vartheta_x \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \vartheta_x e^{-\frac{m(\vartheta_x^2 + \vartheta_y^2 + \vartheta_z^2)}{2kT}} d\vartheta_y d\vartheta_z = nS \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^\infty \vartheta_x e^{-\frac{m\vartheta_x^2}{2kT}} d\vartheta_x = \\ &= nS \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \int_0^\infty e^{-\frac{m\vartheta_x^2}{2kT}} d\frac{\vartheta_x^2}{2} = nS \sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}. \end{aligned}$$

$$P = nkT \text{ болгондуктан } \frac{dN}{dt} = SP \sqrt{\frac{1}{2\pi mkT}}.$$

4.11 Эгерде кыймылсыз атом толкун узундугу  $\lambda_0$  болгон жарыкты нурдантса, анда байкоочудан  $\vartheta$  ылдамдыгы менен алыстап бараткан атомдун нурдануусу, Допплердин эффектинин натыйжасында, узундугу

$$\lambda = \lambda_0 \left( 1 + \frac{\vartheta}{c} \right) \text{ болгон жарык толкуну катары катталат, мында } c -$$

жарыктын ылдамдыгы.

Толкун узундугунун  $\lambda \div \lambda + d\lambda$  интервалында атомдор нурданткан жарыктын интенсивдүүлүгү

$$I d\lambda = I \lambda_0 \frac{d\vartheta}{c} = \alpha n d\vartheta, \quad \text{мында } \alpha - \text{бир атом нурданткан жарыктын}$$

интенсивдүүлүгү.  $\vartheta$  ылдамдыгына ээ болгон атомдордун саны,

$$\text{Максвеллдин бөлүштүрүүсүнө ылайык, } n \sim e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}} \sim e^{-\frac{mc^2(\lambda-\lambda_0)^2}{2\lambda_0^2 kT}}$$

$$\text{Ошондуктан } I = I_0 e^{-\frac{mc^2(\lambda-\lambda_0)^2}{2\lambda_0^2 kT}} = I_0 \cdot e^{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{\delta^2}},$$

мында  $\delta = \sqrt{\frac{2kT\lambda^2}{mc^2}}$  - спектралдык сызыктын доплердик кеңдиги.

4.12 Атомдордун кыймылынын ылдамдыктары үчүн ыктымалдыктардын бөлүнүшү

$$dw_\vartheta = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}} \vartheta^2 d\vartheta.$$

$$\text{Белгилөө киргизели: } \frac{m\vartheta^2}{2} = \varepsilon. \quad \text{Анда } m\vartheta d\vartheta = d\varepsilon.$$

$$\text{Демек, } dw_\varepsilon = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\frac{2\varepsilon}{m}} \cdot \frac{d\varepsilon}{m} = \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon.$$

4.13 Газдын молекулаларынын  $\varepsilon$  ден  $\varepsilon + d\varepsilon$  ге чейинки интервалдагы энергияга ээ болушунун ыктымалдыгы

$$dw_\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon.$$

Бул функциянын максимумун табалы:

$$e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \left( -\frac{1}{kT} \right) \sqrt{\varepsilon} + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = 0.$$

Мындан  $\varepsilon_{\text{эбл}} = \frac{kT}{2}$ , ал эми  $\frac{m g^2}{2} = \frac{m}{2} \frac{2kT}{m} = kT$ .

4.14 Молекуланын кинетикалык энергиясы  $\varepsilon$  дон  $\varepsilon + d\varepsilon$  го чейинки маанилерге ээ болушунун ыктымалдыгы

$$dw_\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^3} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon.$$

Ал эми молекуланын энергиясы анын берилген  $\varepsilon_0$  маанисинен ашып кетпешинин ыктымалдыгы

$$w_\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^3} \int_0^{\varepsilon_0} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \sqrt{\varepsilon} d\varepsilon.$$

Жаңы өзгөрүлмөлөрдү киргизели:  $\frac{\varepsilon}{kT} = x^2$ ,  $d\varepsilon = 2kT x dx$ . Анда

$$w_\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{\pi}(kT)^3} \cdot 2(kT)^{3/2} \int_0^{x_0} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_0} x^2 e^{-x^2} dx,$$

мында  $x_0 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{kT}}$ .

Бөлүктөп интегралдагандан кийин төмөнкүгө ээ болобуз:

$$w_\varepsilon = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left[ -x \frac{e^{-x^2}}{2} \Big|_0^{x_0} + \frac{1}{2} \int_0^{x_0} e^{-x^2} dx \right] = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} x_0 e^{-x_0^2} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x_0} e^{-x^2} dx = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{kT}} e^{-\frac{\varepsilon_0}{kT}} + \operatorname{erf} \left( \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{kT}} \right).$$

4.15 Жалпы энергияны энергиялардын суммасы  $E = E_1 + E_2 + \dots + E_n$  түрүндө жазып, Больцмандын бөлүштүрүүсүн төмөнкүдөй көрүнүшкө келтирүүгө болот:

$$f(E) = A e^{-\frac{E_1}{kT}} e^{-\frac{E_2}{kT}} \dots e^{-\frac{E_n}{kT}}.$$

4.16 Барометрдик формулага ылайык кайсы бир  $h$  бийиктигиндеги газдын басымы

$$P_h = P_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}, \quad \frac{P_h}{P_0} = \frac{1}{3} \quad \text{болгондуктан} \quad h = \frac{kT}{mg} \ln 3 \approx 8,6 \text{ км}.$$

4.17 Аба мамычасынын орточо бийиктиги төмөнкүдөй аныкталышы мүмкүн:

$$\bar{Z} = \frac{\int_0^\infty z e^{-\frac{mgz}{kT}} dz}{\int_0^\infty e^{-\frac{mgz}{kT}} dz}, \quad \int_0^\infty e^{-\frac{mgz}{kT}} dz = -\frac{kT}{mg} e^{-\frac{mgz}{kT}} \Big|_0^\infty = \frac{kT}{mg},$$



$$\int_0^{\infty} z e^{-\frac{mgz}{kT}} dz = -\frac{kT}{mg} z e^{-\frac{mgz}{kT}} \Big|_0^{\infty} + \frac{kT}{mg} \int_0^{\infty} e^{-\frac{mgz}{kT}} dz = -\left(\frac{kT}{mg}\right)^2 e^{-\frac{mgz}{kT}} \Big|_0^{\infty} = \left(\frac{kT}{mg}\right)^2.$$

Демек,

$$\bar{Z} = \frac{\left(\frac{kT}{mg}\right)^2}{\frac{kT}{mg}} = \frac{kT}{mg}, \quad \bar{Z} \approx 7,85 \text{ км}$$

$$4.18 \quad \bar{Z}^2 = \frac{kT}{mg} \int_0^{\infty} z^2 e^{-\frac{mgz}{kT}} dz = 2 \left(\frac{kT}{mg}\right)^2.$$

4.19 Негизи 1 см<sup>2</sup> жана бийиктиги 1000 м болгон аба мамычасындагы молекулалардын саны

$$n(h) = \int_0^h n(z) dz = \int_0^h n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} dz = n_0 \left( -\frac{kT}{mg} e^{-\frac{mgz}{kT}} \right) \Big|_0^h = n_0 \frac{kT}{mg} \left( 1 - e^{-\frac{mgh}{kT}} \right).$$

Анда чексиз бийик аба мамычасындагы молекулалардын саны

$$n_{\infty} = n_0 \frac{kT}{mg}, \quad \text{же} \quad n_{\infty} = 2,11 \cdot 10^{25} = 35 \text{ моль},$$

$$n(h) = n_{\infty} \left( 1 - e^{-\frac{mgh}{kT}} \right),$$

$$n(h) = 0,25 \cdot 10^{25} = 4,2 \text{ моль}.$$

4.20 Алдыңкы маселеде аныкталгандай, негизи 1 см<sup>2</sup> болгон чексиз бийик аба мамычасында  $n_{\infty} = 35$  моль өлчөмүндө молекула бар. Абанын молдук массасы  $M = 29 \frac{\text{г}}{\text{моль}}$ . Анда абанын чексиз мамычасынын массасы  $m = nM = 1015 \text{ г} \approx 1 \text{ кг}$ , салмагы  $P = mg \approx 9,8 \text{ Н}$ , мында  $g$ -эркин түшүүнүн ылдамдануусу.

4.21 Идеалдуу газдын молекулаларынын потенциалдык энергиясынын орточо мааниси

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{\int_0^h mgze^{-\frac{mgz}{kT}} dz dx dy}{\int_0^h e^{-\frac{mgz}{kT}} dz dx dy} = \frac{mg \left[ z \left( -\frac{kT}{mg} e^{-\frac{mgz}{kT}} \right) \Big|_0^h + \frac{kT}{mg} \int_0^h e^{-\frac{mgz}{kT}} dz \right]}{\frac{kT}{mg} e^{-\frac{mgz}{kT}} \Big|_0^h} = \\ &= \frac{mg \left[ \frac{kT}{mg} e^{-\frac{mgh}{kT}} + \left( \frac{kT}{mg} \right)^2 \left( 1 - e^{-\frac{mgh}{kT}} \right) \right]}{\frac{kT}{mg} \left( 1 - e^{-\frac{mgh}{kT}} \right)} = mg \frac{\frac{kT}{mg} \left( 1 - e^{-\frac{mgh}{kT}} \right) - he^{-\frac{mgh}{kT}}}{1 - e^{-\frac{mgh}{kT}}} = \\ &= kT \left( 1 - \frac{mgh e^{-\frac{mgh}{kT}}}{1 - e^{-\frac{mgh}{kT}}} \right) = kT \left( 1 - \frac{mgh}{e^{\frac{mgh}{kT}} - 1} \right). \end{aligned}$$

### Гиббстин бөлүштүрүүлөрү. Идеалдуу газдын статистикасы

4.22 Системанын эркин энергиясы анын абалдарынын статистикалык суммасы менен  $F = -kT \ln Z$  формуласы аркылуу байланышары белгилүү. Ал эми системанын энтропиясы эркин энергия аркылуу төмөнкүдөй аныкталат:

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = k \ln Z + kT \frac{\partial \ln Z}{\partial T}, \quad S = k(\ln Z + T \frac{\partial \ln Z}{\partial T}).$$

4.23 Системанын ички энергиясы

$$U = F + TS = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -kT \ln Z + k(\ln Z)T + kT\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V T = kT^2\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V.$$

Анда системанын жылуулук сыйымдуулугу

$$C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = kT \left[ 2\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V + T\left(\frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2}\right)_V \right].$$

4.24 Системанын термодинамикалык потенциалы  $G = F + PV$ .

$$P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = kT\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T \quad \text{болгондуктан}$$

$$G = -kT \ln Z + VT\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial V}\right)_T = kT \left[ \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln V}\right)_T - \ln Z \right].$$

4.25 Системанын энтальпиясы  $H = U + PV$  болгондуктан

$$U = kT^2\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)_V, \quad PV = kT\left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln V}\right)_T$$

$$H = kT \left[ \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln T}\right)_V + \left(\frac{\partial \ln Z}{\partial \ln V}\right)_T \right].$$

4.26 Квазиклассикалык жакындаштырууда сызыктуу гармоникалык осциллятор үчүн энергиялар боюнча Гиббстин бөлүштүрүүсү

$$dw = \frac{1}{Z} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} d\Omega \quad \text{көрүнүшүнө ээ, мында}$$

$$Z = I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{p^2}{2mkT} - \frac{m\omega^2 x^2}{2kT}} \frac{dpdx}{h} = \sqrt{2\pi kTm} \sqrt{\frac{2\pi kT}{m\omega^2}} \cdot \frac{1}{h} = \frac{2\pi kT}{\omega h} = \frac{kT}{h\nu}.$$

$$\text{Анда} \quad dw = \frac{h\nu}{kT} e^{-\left(\frac{p^2}{2mkT} + \frac{m\omega^2 x^2}{2kT}\right)} \frac{dpdx}{h} = \frac{\nu}{kT} e^{-\left(\frac{p^2}{2mkT} + \frac{m\omega^2 x^2}{2kT}\right)} dpdx.$$

4.27 Энергиянын  $\varepsilon \div \varepsilon + d\varepsilon$  интервалына туура келген абалдардын саны

$$d\Omega = \frac{\partial \Omega}{\partial \varepsilon} \frac{d\varepsilon}{h^{3N}}.$$

Больцмандын формуласы боюнча  $\Omega = e^{\frac{S}{k}}$ , ал эми энтропия

$$S = Nk \ln \frac{V}{N} + Nk \ln T + S_0. \quad \text{Ошондуктан}$$

$$\Omega = \left(\frac{V}{N}\right)^N T^N = \left(\frac{V}{N}\right)^N \left(\frac{\varepsilon}{Nk}\right)^N.$$

Анда 
$$d\Omega = \frac{N}{h^{3N}} \left(\frac{V}{N}\right)^N \frac{\varepsilon^{N-1}}{(Nk)^N} d\varepsilon.$$

#### 4.28 Фазалык мейкиндиктеги көлөмдүн элементи

$$d\Gamma = 4\pi p^2 V dp, \quad \Gamma = \frac{4\pi}{3} V p^3 = \frac{4\pi}{3} V \frac{\varepsilon^3}{c^3}.$$

$$\Omega(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{\partial \Gamma}{\partial \varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{h^3} \quad \text{болгондуктан ан}$$

$$\Omega(\varepsilon) d\varepsilon = \frac{4\pi V \varepsilon^2}{c^3 h^3} d\varepsilon.$$

#### 4.29 Системанын жылуулук сыйымдуулугу

$$C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = anT^{n-1},$$

Энтропиясы

$$S = \int \frac{\delta Q}{T} = \int \frac{C_V}{T} dT = \int anT^{n-2} dT = \frac{anT^{n-1}}{n-1} = na^n E^{\frac{1}{n}}.$$

Системанын абалдарынын саны анын энтропиясы менен төмөнкүдөй байланышкан

$$\Omega(E) = e^S = \exp\left(\frac{na^n E^{\frac{1}{n}}}{n-1}\right).$$

#### 4.30 Кванттык механикада сызыктуу осциллятордун энергетикалык деңгээлдери $\varepsilon_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\nu$ формуласы аркылуу аныкталат, анын

статистикалык суммасы

$$Z_1 = \sum_n e^{-\frac{\varepsilon_n}{kT}} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{h\nu}{kT}} = e^{-\frac{h\nu}{2kT}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)^n.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{h\nu n}{kT}} = \frac{1}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} \quad \text{болгондуктан} \quad Z_1 = \frac{e^{-\frac{h\nu}{2kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}}.$$

Анда бири-бирине байланышпаган сызыктуу осцилляторлордун

системасынын статистикалык суммасы 
$$Z = Z_1^N = \frac{e^{-\frac{N h \nu}{2kT}}}{\left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right)^N}.$$

Системанын эркин энергиясы

$$F = -kT \ln Z = -NkT \ln \frac{e^{-\frac{h\nu}{2kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} = \frac{N h \nu}{2} + NkT \ln \left(1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}\right).$$

Анда энтропия

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = -Nk \ln \left( 1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) + NkT \frac{\frac{h\nu}{kT} e^{-\frac{h\nu}{kT}}}{1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}}} = Nk \left[ \frac{h\nu}{kT} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} - \ln \left( 1 - e^{-\frac{h\nu}{kT}} \right) \right].$$

4.31 Идеалдуу газдардын аралашмасындагы биринчи газдын молекулаларынын саны  $N_1$ , экинчисиники  $N_2$  болсун дейли. Анда газдардын аралашмасынын статистикалык интегралы

$$Z = \frac{Z_1^{N_1}}{N_1!} \cdot \frac{Z_2^{N_2}}{N_2!},$$

мында  $Z_1$  жана  $Z_2$  - биринчи жана экинчи газдардын бир молекуласы үчүн статистикалык интегралдар.  $Z_1$  жана  $Z_2$  нин ордуна алардын маанилерин коюп төмөнкүгө ээ болобуз:

$$Z = \frac{\left( \frac{2\pi m_1 kT}{h^2} \right)^{\frac{3N_1}{2}} V^{N_1}}{N_1!} \cdot \frac{\left( \frac{2\pi m_2 kT}{h^2} \right)^{\frac{3N_2}{2}} V^{N_2}}{N_2!}.$$

Идеалдуу газдардын аралашмасынын эркин энергиясы  
 $F = -kT \ln Z = F_1 + F_2.$

Газдардын аралашмасынын басымы

$$P = -\left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T = -\left( \frac{\partial F_1}{\partial V} \right)_T + \left( -\frac{\partial F_2}{\partial V} \right)_T = P_1 + P_2 = \frac{(N_1 + N_2)kT}{V}.$$

4.32 Идеалдуу газдын абалдарынын тыгыздыгы  $E^{\frac{3N}{2}-1}$  ге пропорциялаш.

Анда  $e^{-\frac{E}{kT}} E^{\frac{3N}{2}-1}$  функциясынын максимумуна туура келген  $E_{эы}$  энергияны бул функциянын туундусунун нөлгө барабардык шартынан оңой эле аныктоого болот:

$$-\frac{1}{kT} e^{-\frac{E}{kT}} E^{\frac{3N}{2}-1} + \left( \frac{3N}{2} - 1 \right) E^{\frac{3N}{2}-2} e^{-\frac{E}{kT}} = 0,$$

мындан толук энергиянын эң ыктымалдуу мааниси

$$E_{эы} = \left( \frac{3N}{2} - 1 \right) kT.$$

Каноникалык бөлүштүрүлгөн энергиянын орточо мааниси

$$\bar{E} = \frac{\int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}} E^{\frac{3N}{2}} dE}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}} E^{\frac{3N}{2}-1} dE} = kT \frac{\Gamma\left(\frac{3N}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)} = \frac{3}{2} NkT.$$

4.33 Энтропиянын аныктоосунан пайдаланабыз

$$S = k \ln \Omega = k \ln \int \frac{dp_1 dp_2 \dots dp_{3N} dq_1 dq_2 \dots dq_{3N}}{h^{3N}} = k \ln \frac{V^N}{h^{3N}} \int dp_1 dp_2 \dots dp_{3N}.$$

$\int dp_1 dp_2 \dots dp_N \sim E^{\frac{3N}{2}}$  болору белгилүү. Анда

$$S = \frac{3Nk}{2} \ln E + Nk \ln V + const.$$

4.34 Газдардын аралашканга чейинки энтропиялары

$$S_1^0 = N_1 k \ln \frac{V_1}{N_1} + N_1 f(T), \quad S_2^0 = N_2 k \ln \frac{V_2}{N_2} + N_2 f(T).$$

Аралашканга чейинки толук энтропия

$$S^0 = S_1^0 + S_2^0.$$

Газдардын аралашкандан кийинки энтропиялары

$$S_1 = N_1 k \ln \frac{V_1 + V_2}{N_1} + N_1 f(T), \quad S_2 = N_2 k \ln \frac{V_1 + V_2}{N_2} + N_2 f(T).$$

Газдар кошулгандан кийинки аралашманын толук энтропиясы

$S = S_1 + S_2$ . Анда аралашуунун натыйжасында системанын энтропиясынын өзгөрүшү

$$\Delta S = S - S^0 = N_1 k \ln \frac{V_1 + V_2}{V_1} + N_2 k \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} > 0.$$

4.35 Идеалдуу газдын эркин энергиясы  $F = -NkT \ln \frac{eV}{N} + Nf(T)$ .

Биз издеген жумуш эркин энергиянын өзгөрүшүнө барабар:

$$A = F_2 - F_1 = -NkT \ln e \frac{V_2}{N} + NkT \ln e \frac{V_1}{N} = NkT \ln \frac{V_1}{V_2}.$$

Идеалдуу газдын энтропиясы

$$S = -\frac{\partial F}{\partial T} = Nk \ln \frac{eV}{N} - Nf'(T).$$

Бул процессте жутулган жылуулук саны

$$Q = T(S_2 - S_1) = NkT \ln \frac{V_2}{V_1}.$$

4.36 Газдын эркин энергиясынын  $F = -NkT \ln \frac{Ve}{N} \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}$

туюнтмасынан пайдаланалы. Анда химиялык потенциал

$$\mu = \left( \frac{\partial F}{\partial N} \right)_{T,V} = -kT \ln \frac{V}{N} \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}.$$

Менделеев-Клапейрондун теңдемесинин жардамында  $T, V$  жана  $N$  өзгөрүлмөлөрүнөн  $T$  жана  $P$  өзгөрүлмөлөрүнө өтүп алалы. Анда

$$\mu = -kT \ln \frac{kT}{P} \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}.$$

$$G = \mu N, \quad \text{демек} \quad G = -NkT \ln \frac{kT}{P} \left( \frac{mkT}{2\pi\hbar^2} \right)^{3/2}.$$

## 5. Реалдуу газдар

- 5.1 Ван-дер-Ваальстын теңдемесин басымга карата чечип, критикалык абал үчүн

$$P_k = \frac{RT_k}{V_k - b} - \frac{a}{V_k^2}$$

теңдемесин алабыз. Мындан

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT_k}{(V_k - b)^2} + \frac{2a}{V_k^3} = 0,$$

$$\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right)_T = \frac{2RT_k}{(V_k - b)^3} - \frac{6a}{V_k^4} = 0.$$

Бул теңдемелерди чогуу чечип

$$V_k = 3b, \quad T_k = \frac{8a}{27Rb} \quad \text{га ээ болобуз, жана, акырында}$$

$$P_k = \frac{RT_k}{V_k - b} - \frac{a}{V_k^2} = \frac{a}{27b^2}.$$

- 5.2 Алдыңкы маселедеги натыйжаларды пайдаланып эсептөөлөрдү жүргүзөбүз:

$$P_k = \frac{2,03}{27(0,0183)^2} = 225 \text{ атм,}$$

$$V_k = 3 \cdot 0,0183 = 0,055 \text{ м}^3 / \text{кмоль,}$$

$$T_k = \frac{8 \cdot 2,03 \cdot 9,81 \cdot 10^4}{27 \cdot 5 \cdot 10^3 \cdot 0,0183} = 643 \text{ К.}$$

- 5.3 Маселедеги  $V, P, T$  нын тиешелүү келтирилген жана критикалык чоңдуктар аркылуу туюнтулган маанилерин Ван-дер-Ваальстын теңдемесине коюу издеген натыйжага - *тиешелешик абалдардын законуна* алып келет.

- 5.4 Реалдуу газдын ички энергиясы

$$U_p = kT^2 \frac{\partial \ln Z_p}{\partial T} = kT^2 \frac{\partial \ln Z_{u0}}{\partial T} + kT^2 \frac{\partial \left( \ln \left( 1 + \frac{N^2 \beta}{2V} \right) \right)}{\partial T}.$$

$$kT^2 \frac{\partial \ln Z_{u0}}{\partial T} = \frac{3}{2} NkT \quad \text{болору белгилүү. Экинчи кошулуучуну}$$

эсептөө үчүн  $\ln \left( 1 + \frac{N^2 \beta}{2V} \right)$  ны катарга ажыратып, катардын биринчи

мүчөсү менен чектелели

$$\ln \left( 1 + \frac{N^2 \beta}{2V} \right) \approx \frac{N^2 \beta}{2V} = \frac{N^2}{V} \left( \frac{a}{kT} - 4g_0 \right),$$

мында  $g_0 = \frac{b}{4}$  - молекула ээлеген көлөм. Анда

$$U_p = \frac{3}{2} NkT - \frac{N^2 a}{V}.$$

Реалдуу газдын турактуу көлөм кезиндеги жылуулук сыйымдуулугу

$C_{pV} = \left( \frac{\partial U_p}{\partial T} \right)_V = \frac{3}{2} Nk$  идеалдуу газдын жылуулук сыйымдуулугуна барабар.

Ван-дер-Ваальстын газынын эркин энергиясы

$$F = -kT \ln Z = -kT \ln Z_{u0} - kT \ln \left( 1 + \frac{N^2 \beta}{2V} \right) \approx F_{u0} - \frac{N^2 kT \beta}{2V} = F_{u0} - \frac{N^2 kT}{V} \left( \frac{a}{kT} - b \right),$$

мында  $F_{u0}$  – идеалдуу газдын эркин энергиясы

$$F_{u0} = -NkT \ln \left[ \frac{eV}{N} \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \right].$$

$$S = - \left( \frac{\partial F}{\partial T} \right)_V = - \left( \frac{\partial F_{u0}}{\partial T} \right)_V - \frac{N^2 kb}{V}.$$

$$S = S_{u0} - \frac{kN^2 b}{V}.$$

Гиббстин термодинамикалык потенциалы

$$G = U + PV - TS.$$

Реалдуу газдын абалынын теңдемеси

$$P = \frac{NkT}{V \left( 1 - \frac{Nb}{V} \right)} - \frac{N^2 a}{V^2},$$

$$U = U_{u0} - \frac{N^2 a}{V}, \quad S = S_{u0} - \frac{N^2 kb}{V}.$$

Анда

$$G = U_{u0} - \frac{N^2 a}{V} + \frac{NkT}{1 - \frac{Nb}{V}} - \frac{N^2 a}{V} - TS_{u0} + \frac{TN^2 kb}{V} = G_{u0} - \frac{N^2 a}{V} + \frac{TN^2 kb}{V}.$$

5.5 Изотермикалык кысылуучулук төмөнкүдөй аныкталат:

$$\chi = - \frac{1}{V} \lim_{\Delta P \rightarrow 0} \frac{V(T, P + \Delta P) - V(T, P)}{\Delta P} = - \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T.$$

Ван-дер-Ваальстын теңдемесин

$$\left( P + \frac{a}{V^2} \right) (V - b) - RT = 0 \quad \text{көрүнүшүндө жазып алалы. Анда}$$

$$\chi = \frac{1}{V} \frac{V - b}{\left( P + \frac{a}{V^2} \right) - \frac{2a(V - b)}{V^3}} = \frac{1}{\frac{RTV}{(V - b)^2} - \frac{2a}{V^2}} \approx \frac{1}{P} \left( 1 - \frac{b}{V} + \frac{a}{PV^2} \right).$$

Акыркы формулада көлөм түзөтүүчү мүчөлөргө гана киргендиктен аны идеалдуу газдын абалынын теңдемесинен табууга болот:

$$V = \frac{RT}{P}, \quad V = 6,78 \text{ м}^3.$$

Параметрлердин сан маанилерин формулага коюп, төмөнкүнү алабыз:

$$\chi \approx 0,01 \text{ атм}^{-1}.$$

5.6 Газдын энтропиясы  $S = S_{uo} - \frac{N^2 kb}{V}.$

$$T_k = \frac{8}{27} \frac{a}{Rb}, \quad P_k = \frac{1}{27} \frac{a}{b^2} \quad \text{барабардыктарынан } b \text{ ны тапсак } b = \frac{kT_k}{8P_k}.$$

Мындан  $S = S_{uo} - \frac{N^2 k}{V} \frac{kT_k}{8P_k}.$

Ошондой эле жол менен  $G = G_{uo} + \frac{kT_k}{8} \frac{P}{P_k} - \frac{9}{8} \frac{NV_k kT}{V}$

түрүндө аныкталарын көрсөтүүгө болот.

5.7 Жалпы учурда

$$C_p - C_v = -T \frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}.$$

Ван-дер-Ваальстын

$$\left(P + \frac{N^2 a}{V}\right)(V - Nb) = NkT$$

тендемесинен пайдаланып  $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V$  жана  $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T$  ларды табалы:

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V = \frac{Nk}{V - Nb}, \quad \left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{NkT}{(V - Nb)^2} + \frac{2Na}{V^3}.$$

Анда

$$C_p - C_v = \frac{-T \left(\frac{Nk}{V - Nb}\right)^2}{-\frac{NkT}{(V - Nb)^2} + \frac{2Na}{V^3}} = \frac{Nk}{1 - \frac{2Na(V - Nb)^2}{kTV^3}}.$$

5.8 Газ боштукка кеңейгенде анын энергиясы өзгөрбөйт.

$$E = E_{uo} - \frac{N^2 a}{V} = NC_v T - \frac{N^2 a}{V} \quad \text{болгондуктан}$$

$$NC_v T_1 - \frac{N^2 a}{V_1} = NC_v T_2 - \frac{N^2 a}{V_2} \quad \text{деп жазууга болот.}$$

Мындан  $T_2 - T_1 = \frac{Na}{C_v} \left(\frac{1}{V_2} - \frac{1}{V_1}\right).$

5.9 Ван-дер-Ваальстын газынын энтропиясы

$$S = S_{uo} + Nk \ln\left(1 - \frac{Nb}{V}\right),$$

мында



$$S_{uo} = Nk \ln V + NC_V \ln T.$$

Анда  $S = Nk \ln V + NC_V \ln T + Nk \ln \left(1 - \frac{Nb}{V}\right).$

Адиабаттык процессте энтропия турактуу сакталгандыктан акыркы теңдемеден адиабатанын теңдемесин төмөнкүдөй көрүнүштө алууга болот:

$$(V - Nb)T^{\frac{C_V}{k}} = const.$$

### 5.10 Ван-дер-Ваальстын

$\left(P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$  теңдемесин өзгөртүп төмөнкүдөй жазып алууга болот:

$$\left(\frac{P + \frac{a}{V^2}}{RT}\right) = \frac{1}{V - b} \quad \text{же} \quad \frac{PV}{RT} = \frac{V}{V - b} - \frac{a}{VRT}.$$

Ал эми  $\frac{V}{V - b} = \frac{1}{1 - \frac{b}{V}} = 1 + \frac{b}{V} + \frac{b^2}{V^2} + \frac{b^3}{V^3} + \dots$  катарга ажыратууга мүмкүн

болгондуктан  $\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{b - \frac{a}{RT}}{V} + \frac{b^2}{V^2} + \frac{b^3}{V^3} + \dots$

же  $\frac{PV}{RT} = 1 + \frac{B_1}{V} + \frac{B_2}{V^2} + \frac{B_3}{V^3} + \dots,$

мында  $B_1 = b - \frac{a}{RT}, \quad B_2 = b^2, \quad B_3 = b^3.$

### 5.11 Дитеричинин абалдар теңдемесин $P = \frac{RT}{V - R} e^{-\frac{a}{RTV}}$ көрүнүшүндө

жазып алалы. Критикалык чекитте  $\frac{\partial P}{\partial V} = 0$  жана  $\left(\frac{\partial^2 P}{\partial V^2}\right) = 0.$

$$\frac{\partial P}{\partial V} = -\frac{RT}{(V - b)^2} e^{-\frac{a}{RTV}} + \frac{RT}{V - b} e^{-\frac{a}{RTV}} \frac{a}{RTV^2} = 0$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} = \frac{2RT}{(V - b)^3} e^{-\frac{a}{RTV}} - \frac{RT}{(V - b)^2} e^{-\frac{a}{RTV}} \frac{a}{RTV^2} - \frac{RT}{(V - b)^2} e^{-\frac{a}{RTV}} \frac{a}{RTV^2} +$$

$$+ \frac{RT}{V - b} e^{-\frac{a}{RTV}} \left(\frac{a}{RTV^2}\right)^2 - \frac{RT}{V - b} e^{-\frac{a}{RTV}} \frac{2a}{RTV^3} = 0.$$

$P_k, V_k$  жана  $T_k$  критикалык турактууларды аныктоо үчүн төмөнкү теңдемелер системасын чечебиз:

$$\left. \begin{aligned} P_k &= \frac{RT_k}{V_k - b} e^{-\frac{a}{RT_k V_k}} \\ \frac{1}{V_k - b} &= \frac{a}{RT_k V_k^2}, \\ \frac{2}{(V_k - b)^2} - \frac{2}{V_k - b} \cdot \frac{a}{RT_k V_k^2} + \left( \frac{a}{RT_k V_k^2} \right) - \frac{2a}{RT_k V_k^3} &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Экинчини эске алып акыркы теңдемени төмөнкүдөй өзгөртүп жазалы

$$\frac{2}{(V_k - b)^2} - \frac{2}{(V_k - b)^2} + \frac{a^2}{R^2 T_k^2 V_k^4} - \frac{2a}{RT_k V_k^3} = 0,$$

же мындан  $T_k V_k = \frac{a}{2R}$ .

Анда

$$\frac{1}{V_k - b} = \frac{a}{RV_k} \cdot \frac{2R}{a} \quad \text{же} \quad V_k = 2b,$$

$$T_k = \frac{a}{2RV_k} = \frac{a}{2R \cdot 2b} = \frac{a}{4Rb},$$

$$P_k = \frac{R \frac{a}{4Rb}}{b} e^{-\frac{a \cdot 4Rb}{R \cdot 2 \cdot ba}} = \frac{a}{4b^2} e^{-2},$$

$$\frac{RT_k}{P_k V_k} = \frac{Rae^2}{4Rb \frac{a}{4b^2} 2b} = \frac{e^2}{2} = 3,69$$

5.12 Маселеде энтальпиясы (H) турактуу сакталган стационардуу эмес процесс жөнүндө сөз жүрөт. Баштапкы абалга тиешелүү бардык чоңдуктарды 1, ал эми акыркы абалдыкын 2 индекси менен белгилеп алабыз. Анда

$$H_1 = U_1 + P_1 V_1 = U_2 + P_2 V_2 = H_2 .$$

Энтальпиянын толук дифференциалы

$$dH = \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T dP = 0. \quad \left( \frac{\partial H}{\partial T} \right)_P = C_P .$$

Реалдуу газдын энтальпиясы

$$H = U_{ид} - \frac{a}{V} + RT \left( 1 + \frac{B}{V} \right),$$

мында  $B = b - \frac{a}{RT}$  - вириалдык коэффициент. Өзгөртүүлөрдү жүргүзөлү

$$\begin{aligned}
 H &= U_{u\delta} - \frac{a}{V} + RT \left( 1 + \frac{B}{V} \right) = U_{u\delta} - \frac{a}{V} + PV \left( 1 + \frac{B}{V} \right) = U_{u\delta} - \frac{a}{V} + PV + PB = H_{u\delta} + PB - \frac{a}{V} = \\
 &= H_{u\delta} + P \left( B - \frac{a}{PV} \right) = H_{u\delta} + P \left( B - \frac{a}{RT} \right) = H_{u\delta} + P \left( B - T \frac{\partial B}{\partial T} \right).
 \end{aligned}$$

$H_{u\delta}$  -басымдан көз каранды эмес, ошондуктан

$$\left( \frac{\partial H}{\partial P} \right)_T = B - T \frac{\partial B}{\partial T} = b - \frac{2a}{RT}.$$

Джоуль-Томсондун эффектиндеги температуранын өзгөрүшүн аныктоо үчүн жекече туундулардын табылган маанилерин толук дифференциалга коюп

$$C_p dT + \left( b - \frac{2a}{RT} \right) dP = 0 \quad \text{туюнтмасын алабыз.}$$

$$\text{Мындан} \quad dT = \frac{dP}{C_p} \left( \frac{2a}{RT} - b \right).$$

Басымдын жана температуранын өзгөрүүлөрү өтө кичине болгон учурда дифференциалдарды өсүндүлөр менен алмаштырууга болот. Бирок берилген маселеде мындай кылууга болбойт. Ошондуктан акыркы теңдемени өзгөртүп жазалы

$$\frac{dT}{\frac{2a}{RT} - b} = \frac{dP}{C_p}.$$

$a, b, R$  жана  $C_p$  ларды турактуу деп эсептеп, теңдеменин эки тарабын тең интегралдайлы:

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{\frac{2a}{RT} - b} = \int_{P_1}^{P_2} \frac{dP}{C_p}.$$

Барабардыктын сол тарабынан

$$\int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{\frac{2a}{RT} - b} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{RTdT}{2a - bRT} = -\frac{1}{b} \int_{T_1}^{T_2} dT + \frac{2a}{b} \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{2a - bRT} = \frac{T_1 - T_2}{b} - \frac{2a}{b^2 R} \ln \frac{2a - bRT_2}{2a - bRT_1}.$$

Анда Джоуль-Томсондун эффекти үчүн теңдеме төмөнкүдөй көрүнүшкө келет:

$$\frac{P_2 - P_1}{C_p} = \frac{T_1 - T_2}{b} - \frac{2a}{b^2 R} \ln \frac{2a - bRT_2}{2a - bRT_1}$$

$$\text{же} \quad \frac{P_2 - P_1}{C_p} = \frac{T_1 - T_2}{b} - \frac{2a}{b^2 R} \ln \left[ 1 - \frac{bR(T_2 - T_1)}{2a - bRT_1} \right].$$

Эгерде  $bR(T_2 - T_1) \ll 2a - bRT_1$  шарты аткарылса, анда жакындаштырылган түрдө төмөнкүдөй жазууга болот:

$$\frac{P_2 - P_1}{C_p} = \frac{T_1 - T_2}{b} - \frac{2a}{b^2 R} \left[ -\frac{bR(T_2 - T_1)}{2a - bRT_1} \right]$$

же 
$$\frac{P_2 - P_1}{C_p} = \frac{T_1 - T_2}{b} - \frac{2a}{b} \frac{T_1 - T_2}{2a - bRT_1},$$

$$T_2 - T_1 = \left( \frac{2a}{TR} - b \right) \frac{P_2 - P_1}{C_p}.$$

Мына ошентип, бир топ жөнөкөйлөтүүлөрдөн кийин басымдардын жана температуралардын өтө аз өзгөрүүлөрү үчүн жакындаштырылган формула менен дал келүүчү туюнтманы алдык

$$\Delta T = \left( \frac{2a}{TR} - b \right) \frac{\Delta P}{C_p}, \quad \Delta T \approx -26,6 \text{ K}$$

5.13 Ван-дер-Ваальстын  $P = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$  теңдемесинен

$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3}.$$

$b = \frac{V_k}{3}, \quad a = 3P_k V_k^2, \quad R = \frac{8 P_k V_k}{3 T_k}$  болгондуктан  $V = V_k$  кезинде

$$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T = \frac{6P_k}{V_k} \cdot \frac{T_k - T}{T_k}.$$

Мына ошентип

$$\left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \sim (T_k - T)^{-1}, \text{ демек } \gamma = 1.$$

## 6. Катуу заттар. Жылуулук сыйымдуулук

6.1 Нерсенин молдук жылуулук сыйымдуулугу  $C_V = cA$ , мында  $c$  - салыштырма жылуулук сыйымдуулук,  $A$ -атомдук масса. Коргошундун молдук жылуулук сыйымдуулугу  $C'_V = 126 \cdot 207,21 \approx 26,1 \text{ кДж}/(\text{кмоль} \cdot \text{K})$ ,

алюминийдики  $C'_V = 896 \cdot 26,98 \approx 24,17 \text{ кДж}/(\text{кмоль} \cdot \text{K})$ .

Катуу нерсенин жылуулук сыйымдуулугу Дюлонг жана Птинин закону боюнча  $C_V = 3R = 3 \cdot 8,32 \cdot 10^3 \text{ кДж}/(\text{кмоль} \cdot \text{K}) = 24,96 \text{ кДж}/(\text{кмоль} \cdot \text{K})$ .

Мына ошентип, коргошундун молдук жылуулук сыйымдуулугу анын Дюлонг-Птинин закону боюнча эсептелген маанисинен ашыкча, ал эми алюминийдин жылуулук сыйымдуулугу бул закон боюнча аныкталган маанисине жакын.

6.2 Эгерде эркин электрондорду классикалык идеалдуу газ сыяктуу карасак, анда газдын алга умтулуу кыймылы менен байланышкан

молдук жылуулук сыйымдуулугу  $\frac{3R}{2}$  ге барабар. Кристаллдык торчонун термелүүчү атомдору  $3N - 6$  эркиндик даражасына ээ жана  $3N - 6 \approx 3N$  гармоникалык осцилляторлордун системасы катары каралышы мүмкүн. Мындай система да классикалык статистика аркылуу сүрөттөлөт деп эсептесек, торчонун термелүүлөрүнөн атомдук жылуулук сыйымдуулукка  $3R$  кошумча кирет. Жыйынтыгында металлдын жылуулук сыйымдуулугу үчүн  $4,5R$  ди алабыз.

### 6.3 Классикалык механикада осциллятордун энергиясы

$E = \frac{m\vartheta^2}{2} + \frac{1}{2}m\omega^2x^2$  формуласы менен аныкталат, мында  $\omega$  – айланма (циклдик) жыштык,  $x$  – тең салмактуулук абалынан жылышы. Орточо чоңдуктун аныктоосу боюнча

$$\begin{aligned} \bar{E} &= \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} E e^{-\frac{E}{kT}} d\vartheta dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{E}{kT}} d\vartheta dx} = \frac{1}{2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (m\vartheta^2 + m\omega^2x^2) e^{-\frac{m\vartheta^2 + m\omega^2x^2}{2kT}} d\vartheta dx}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\vartheta^2 + m\omega^2x^2}{2kT}} d\vartheta dx} = \frac{m}{2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \vartheta^2 e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}} d\vartheta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega^2x^2}{2kT}} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}} d\vartheta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega^2x^2}{2kT}} dx} + \\ &= \frac{\frac{1}{2}m\omega^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}} d\vartheta \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{m\omega^2x^2}{2kT}} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}} d\vartheta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega^2x^2}{2kT}} dx} = \frac{\frac{1}{2}m \int_{-\infty}^{\infty} \vartheta^2 e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}} d\vartheta}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}} d\vartheta} + \frac{1}{2}m\omega^2 \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{m\omega^2x^2}{2kT}} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{m\omega^2x^2}{2kT}} dx}. \end{aligned}$$

Биринчи интегралда  $\frac{m\vartheta^2}{2kT} = y^2$ , ал эми экинчисинде  $\frac{m\omega^2x^2}{2kT} = z^2$  деп

белгилеп алалы. Анда 
$$\bar{E} = kT \frac{\int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy} + kT \frac{\int_{-\infty}^{\infty} z^2 e^{-z^2} dz}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz}.$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2} dy = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \quad \text{болгондуктан}$$

$$\bar{E} = \frac{1}{2}kT + \frac{1}{2}kT = kT, \quad \text{б.а гармоникалык осциллятордун орточо энергиясы} \quad \bar{E} = kT.$$

### 6.4 Эйнштейндин теориясында катуу зат турактуу $\nu$ жыштыгы менен термелүүчү $N$ көз карандысыз осциллятордун көптүгү катары каралат. Мындай бир осциллятордун энергиясы

$$\varepsilon_1 = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$$

болгондуктан бир моль ( $N = N_A$ ) заттын энергиясы

$$E = 3N_A \frac{h\nu}{e^{kT} - 1}.$$

Анда заттын турактуу көлөм кезиндеги молдук жылуулук сыйымдуулугу

$$C_V = \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{3N_A h\nu \frac{h\nu}{kT^2} e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left( e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2} = \frac{3N_A}{kT^2} \cdot \frac{h^2 \nu^2 e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left( e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)^2}.$$

$$\frac{h\nu}{k} = \theta \quad \text{аркылуу белгилесек, анда} \quad C_V = 3R \frac{\left( \frac{\theta}{T} \right)^2 e^{\frac{\theta}{T}}}{\left( e^{\frac{\theta}{T}} - 1 \right)^2}.$$

## 6.5 Энергиянын орточо мааниси

$$\bar{E} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} E e^{-\frac{E(p,q)}{kT}} dpdq}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{E(p,q)}{kT}} dpdq}, \quad \text{мында} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{E(p,q)}{kT}} dpdq = I - \text{абалдардын интегралы.}$$

Интегралдоо координаттар жана импульстар боюнча жүргүзүлгөндүктөн интегралдын астында температура боюнча дифференциалдоону параметр боюнча дифференциалдоо катары жүргүзүүгө болот. Анда

$$\frac{d}{dT} \ln I = \frac{1}{I} \cdot \frac{d}{dT} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{E(p,q)}{kT}} dpdq = \frac{1}{I} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{E(p,q)}{kT^2} e^{-\frac{E(p,q)}{kT}} dpdq$$

$$\text{же} \quad \frac{d}{dT} \ln I = \frac{1}{kT^2} \frac{\int_{-\infty}^{\infty} E(p,q) e^{-\frac{E(p,q)}{kT}} dpdq}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{E(p,q)}{kT}} dpdq}, \quad \text{мындан} \quad \bar{E} = kT^2 \frac{d \ln I}{dT}.$$

## 6.6 Катуу заттын жылуулук сыйымдуулугу Дебайдын теориясы боюнча

$$C_V = 9R \left( \frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta}{T}} \frac{e^x x^4 dx}{(e^x - 1)^2}, \quad \text{мында} \quad x = \frac{h\nu_i}{kT}, \quad \theta = \frac{h\nu_{\max}}{k}.$$

Жогорку температураларда  $e^x = 1 + x + \dots$  Анда

$$\begin{aligned} C_V &= 9R \left( \frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\frac{\theta}{T}} \frac{(1+x)x^4 dx}{(1+x-1)^2} dx = 9R \left( \frac{T}{\theta} \right)^3 \cdot \left[ \int_0^{\frac{\theta}{T}} x^2 dx + \int_0^{\frac{\theta}{T}} x^3 dx \right] = \\ &= 9R \left( \frac{T}{\theta} \right)^3 \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{\theta}{T} \right)^3 + \frac{1}{4} \left( \frac{\theta}{T} \right)^4 \right] = 3R \left( 1 + \frac{3}{4} \frac{\theta}{T} \right) \approx 3R. \end{aligned}$$

6.7 Дебайдын теориясы боюнча катуу заттын жылуулук сыйымдуулугунун формуласын төмөнкүдөй көрүнүштө жазып алалы:

$$C_V = 3R \left[ 12 \left( \frac{T}{\theta} \right)^3 \int_0^{\theta/T} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} - \frac{3\theta/T}{e^{\theta/T} - 1} \right],$$

мында  $\theta$  - заттын мүнөздүк температурасы.  $\theta \gg T$  болгон төмөнкү температураларда интегралдоонун жогорку пределин чексиздикке алмаштырууга болот. Бул учурда

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15}. \quad \text{Анда} \quad C_V = 3R \left[ 12 \left( \frac{T}{\theta} \right)^3 \frac{\pi^4}{15} - \frac{3\theta/T}{e^{\theta/T} - 1} \right],$$

Өтө төмөнкү температураларда чарчы кашаанын ичиндеги экинчи кошулуучу нөлгө умтулгандыктан аны эсепке албай эле коюуга болот. Ошондуктан жыйынтыгында

$$C_V = \frac{12\pi^4 R}{5\theta^3} T^3 = \beta T^3.$$

6.8 Статистикалык тең салмактуулук абалында күчтүн орточо мааниси нөлгө барабар:

$$f = -\alpha \bar{x} + 3\beta \bar{x}^2 = 0.$$

Мындан  $\bar{x} = \frac{3\beta}{\alpha} \bar{x}^2.$

Эгерде молекуладагы атомдордун термелүүлөрүн гармоникалык деп эсептесек, анда

$$\bar{x}^2 = \frac{kT}{\alpha}, \quad \bar{x} = \frac{3\beta kT}{\alpha^2}.$$

Жылуулуктан кеңейүү коэффициенти

$$\gamma = \frac{\bar{x}}{aT} = \frac{3\beta k}{\alpha^2 a},$$

мында  $a$  – атомдордун ортосундагы тең салмактуу аралык.

6.9 Алгач жездин электрондук жылуулук сыйымдуулугун аныктап алалы. Металлдын электрондук жылуулук сыйымдуулугу  $C_{V_e} = \gamma T$  формуласы менен аныкталары белгилүү, мында  $\gamma$  – пропорциялаштык коэффициенти. Жез үчүн  $\gamma = 7,28 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{K}^2).$

Анда электрондук жылуулук сыйымдуулук

2К кезинде  $C'_{V_e} = 7,28 \cdot 10^{-4} \cdot 2 = 14,56 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{K}),$

1000К кезинде  $C''_{V_e} = 7,28 \cdot 10^{-4} \cdot 1000 = 7,28 \cdot 10^{-1} \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot \text{K}).$

Жылуулук сыйымдуулуктун торчолук түзүүчүсүн  $2K$  кезинде  $C'_{V_T} = 234R \left(\frac{T}{\theta}\right)^3$  формуласы аркылуу аныктайбыз.

$$C'_{V_T} = 234 \cdot 8.32 \cdot \left(\frac{2}{316}\right)^3 \approx 4.8 \cdot 10^{-4} \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot K).$$

$1000K$  кезинде жездин торчолук жылуулук сыйымдуулугун жетишерлик даражадагы тактыкта Дюлонг-Птинин закону боюнча аныктоого болот:

$$C''_{V_T} = 3R = 24,96 \text{ Дж}/(\text{моль} \cdot K).$$

Мына ошентип, жогорку температураларда жылуулук сыйымдуулуктун торчолук түзүүчүсү электрондук жылуулук сыйымдуулуктан бир канча эсе көптүк кылат, ал эми төмөнкү температураларда жылуулук сыйымдуулуктун электрондук түзүүчүсү торчолук түзүүчүсүнөн ашып кетиши мүмкүн.

## 7. Бөлүкчөлөрүнүн саны өзгөрүлмө системалар. Фазалык өтүүлөр

7.1  $U = TS - PV + \mu \bar{n}$  жана  $dU = TdS - PdV + \mu dn$  болгондуктан  $d(PV) = d(\mu \bar{n}) + d(TS) - dU = SdT + PdV + \bar{n}d\mu$ .

7.2 Эгерде  $T$  температурасында бири-биринен көз карандысыз бирдей системалардын  $x$  көптүгү берилсе, анда алардын чогуусунун статистикалык суммасы бирөөсүнүн статистикалык суммасынын  $x$ - даражасына барабар экендиги белгилүү. Жалпы системадагы бөлүкчөлөрдүн саны  $xN$ , ал эми анын көлөмү  $xV$  га барабар болгондуктан

$$\Phi(xN, xV, T) = \Phi(N, V, T)^x.$$

Бул барабардыктын эки тарабын тең логарифмалап,  $x$  боюнча жекече туундусун алсак

$$N \frac{\partial \ln \Phi(xN, xV, T)}{\partial (xN)} + V \frac{\partial \ln \Phi(xN, xV, T)}{\partial (xV)} = \ln \Phi(N, V, T).$$

Эгерде алынган барабардыктын сол тарабында  $x=1$  деп алсак издеген теңдемеге ээ болобуз.

7.3 Өтүүнүн (Бозе-конденсациянын) температурасы  $T_k = 155 \rho^{2/3} M^{-5/3}$  туюнтмасы аркылуу аныкталат, мында  $\rho - \text{г}/\text{см}^3$  дарда туюнтулган тыгыздык,  $M$ -молекулалык салмак.  $\rho$  жана  $M$ дин маанисин формулага коюп,  $T_k = 3.2K$  болорун көрөбүз. Температуранын бул мааниси  ${}^4\text{He I} \Rightarrow {}^4\text{He II}$  ге өтүүчү температурага жетишерлик жакын.



7.4 Клапейрон-Клаузиустун теңдемесинен

$$\frac{dT}{dP} = \frac{T(V_2 - V_1)}{q} \quad \text{ну алабыз.} \quad \frac{dT}{dP} = -0.99 \cdot 10^{-4} \text{ К / см.сым.мам.}$$

7.5 Клапейрон-Клаузиустун

$$\frac{dP}{dT} = \frac{q}{(V_2 - V_1)T} \quad \text{теңдемесине } q \text{ нун маанисин коелу:}$$

$$\frac{dP}{dT} = \frac{a - bT}{(V_2 - V_1)T}, \quad \text{мында } V_1 - \text{ суюктуктун салыштырма көлөмү,}$$

$V_2 - \text{ буунун салыштырма көлөмү.}$

Бардык суюктуктар үчүн  $V_2 \gg V_1$  болгондуктан биринчи жакындаштырууда суюктуктун салыштырма көлөмүн эсепке албай койсо болот. Анда  $\frac{dP}{dT} = \frac{a - bT}{V_2 T}$ .

Газ абалынын теңдемесинен буунун салыштырма көлөмү

$$V_2 = \frac{V}{m} = \frac{RT}{PM}.$$

Аны теңдемеге коюп

$$\frac{dP}{P} = \frac{Ma - bT}{R T^2} dT \quad \text{ны алабыз.}$$

Интегралдайлы:

$$\int_{P_0}^P \frac{dP}{P} = \int_{T_0}^T \frac{Ma - bT}{R T^2} dT,$$

$$\ln \frac{P}{P_0} = -\frac{M}{R} \left[ a \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) + b \ln \frac{T}{T_0} \right]$$

$$\text{же } P = P_0 e^{-\frac{M}{R} \left[ a \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right) + b \ln \frac{T}{T_0} \right]}.$$

$T_0 = 273 \text{ К}$  кезинде  $P_0 = 1 \text{ атм}$  болорун эске алып, чоңдуктардын сандык маанилерин ордуна койгондон кийин

$$P = 0,471 \text{ атм} = 375,2 \text{ мм Hg}.$$

7.6 Клапейрон-Клаузиустун теңдемесинин негизинде  $\frac{dT}{dP} = \frac{\Delta V}{\Delta S}$  деп жазууга болот.

$T \rightarrow 0$  умтулганда  $\Delta V$ нын чоңдугу чектүү калат, ал эми  $\Delta S \rightarrow 0$ .

Ошондуктан  $T \rightarrow 0$  умтулганда  $\frac{dT}{dP} \rightarrow \infty$  умтулат.

7.7 Фазалык өтүүнүн жылуулугу  $dq = TdS$ , ал эми жылуулук сыйымдуулук

$C = T \frac{dS}{dT}$ , мында  $\frac{dS}{dT}$  – тең салмактуулук ийрисиин бойлото алынган туунду.

$$\frac{dS}{dT} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{dT} \quad \text{болгондуктан}$$

$$C = T \left[ \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P + \left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{dT} \right] = T \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_P - T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \frac{dP}{dT}.$$

$\frac{dP}{dT} = \frac{qP}{kT^2}$  жана салыштырма көлөм  $V = \frac{kT}{P}$  болорун эске алсак, анда

$$C = C_P + T \frac{k}{P} \frac{qP}{kT^2} = C_P - \frac{q}{T}.$$

7.8 Тең салмактуулук ийриси үчүн  $\frac{dV}{dT}$  ны аныктоо зарыл.

$$\frac{dV}{dT} = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P + \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T \frac{dP}{dT}.$$

$\frac{dP}{dT} = \frac{qP}{kT^2}$  жана  $V = \frac{kT}{P}$  экендигин эске алсак, анда

$$\frac{dV}{dT} = \frac{k}{P} - \frac{kT}{P^2} \frac{qP}{kT^2} = \frac{1}{P} \left( k - \frac{q}{T} \right).$$

Төмөнкү температураларда  $\frac{dV}{dT} < 0$ , б.а температуранын жогорулашы менен буунун көлөмү азаят.

7.9 Клапейрон-Клаузиустун  $\frac{dP}{dT} = \frac{S_2 - S_1}{V_2 - V_1}$  теңдемесинин оң тарабы

экинчи тектеги фазалык өтүүлөрдө  $\frac{0}{0}$  көрүнүшүндөгү

аныксыздыкка айланат. Бул аныксыздыкты ачуу үчүн Лопиталдын эрежесинен пайдаланабыз. Теңдеменин оң жагындагы бөлчөктүн алымын жана бөлүмүн  $T$  жана  $P$  боюнча дифференциалдап төмөнкүгө ээ болобуз:

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\frac{\partial S_2}{\partial T} - \frac{\partial S_1}{\partial T}}{\frac{\partial V_2}{\partial T} - \frac{\partial V_1}{\partial T}} = \frac{C_2 - C_1}{T \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P} = \frac{\Delta C_P}{T \Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}.$$

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{\frac{\partial S_2}{\partial P} - \frac{\partial S_1}{\partial P}}{\frac{\partial V_2}{\partial P} - \frac{\partial V_1}{\partial P}}.$$

$$\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P \quad \text{болорун эске алсак, анда} \quad \frac{\partial P}{\partial T} = -\frac{\Delta \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P}{\Delta \left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T}.$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P = -\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T} \quad \text{болгондуктан} \quad \Delta C_P = -T\Delta\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2 \Delta\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T.$$

## 8. Кванттык статистика. Ферми-Дирактын жана Бозе-Эйнштейндин бөлүштүрүүлөрү

8.1 Нурдануунун  $V$  көлөмүндөгү толук энергиясы

$$E = U = \sigma VT^4, \quad \text{мында} \quad \sigma = \frac{\pi^2 k^4}{15\hbar^3 c^3} - \text{Стефан-Больцмандын турактуусу.}$$

Кара нурдануунун эркин энергиясы

$$F = -T \int \frac{E dT}{T^2} = -\frac{\sigma VT^4}{3}.$$

Нурдануунун энтропиясы

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \frac{4}{3}\sigma VT^3,$$

$$\text{басымы} \quad P = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{\sigma T^4}{3} = \frac{E}{3V} = \frac{u}{3},$$

мында  $u$  – нурдануу энергиясынын көлөмдүк тыгыздыгы.

8.2 Бирдик көлөмдөгү электромагниттик нурдануунун энергиясы

$$u = \sigma T^4, \quad \text{ал эми } V \text{ көлөмүндөгүсү } E = \sigma VT^4.$$

$$\text{Фотондук газдын жылууулук сыйымдуулугу} \quad C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = 4\sigma VT^3.$$

8.3 Жалпы термодинамикалык туюнтманын негизинде

$$C_P = C_V - \frac{T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}.$$

Нурдануунун басымы көлөмдөн көз каранды болбойт. Ошондуктан

$$\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T \rightarrow 0 \quad \text{жана} \quad C_P \rightarrow \infty.$$

8.4 Шардын бетинин бирдик аянтынан убакыт бирдигинде нурдануучу энергия  $E = \sigma(T^4 - T_1^4)$ .

Анда нурдануунун кубаттуулугу

$$N = 4\pi r^2 E = 4\pi r^2 \sigma(T^4 - T_1^4).$$

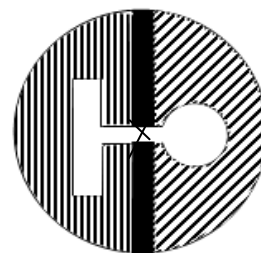
8.5 Тең салмактуу нурдануунун  $u(\omega)$  спектралдык тыгыздыгынын

максимуму  $\frac{\partial u(\omega)}{\partial \omega} = 0$  экстремум шартынан аныкталуучу  $\omega_m$

жыштыгына туура келет. Экстремум шарты жыштыкты чен бирдиксиз  $\frac{\hbar\omega}{kT}$  комбинациясында гана камтыйт, мындан

$$\frac{\omega_m}{T} = const \quad \text{же} \quad \frac{\omega_m(T_1)}{\omega_m(T_2)} = \frac{T_1}{T_2} \quad \text{келип чыгат.}$$

8.6 47-сүрөттө эки көлөм көрсөтүлгөн. Айталы системалардын ар бири тең салмактуу жана алардын температуралары бирдей болсун. Эгерде көңдөйлөрдөгү энергиянын тыгыздыктары түрдүүчө болушса, анда аларды туташтырганда тең салмактуулук бузулат. Нурдануу тыгыздыгы жогору болгон көлөмдөн тыгыздыгы төмөн көлөмгө өтөт. Натыйжада акыркы системада дубалдар көбүрөөк энергия алып, алардын температурасы жогорулайт, демек, башкасында төмөндөйт. Ошентип, өз алдынча температуралардын айырмасы түзүлөт, а бул термодинамиканын экинчи башталышына каршы келет. Демек, энергиянын тыгыздыгы түрдүүчө болсун деген божомол туура эмес. Нурдануунун интегралдык тыгыздыгы жөнүндө айтылгандардын бардыгы спектралдык тыгыздык үчүн да аткарылат. Ал үчүн көңдөйлөр кошулган жерде жыштыктын белгилүү интервалындагы гана нурданууну өткөрүүчү фильтр коюлган деп эсептеп, жогорудагы талкуулоолорду толук кайталап чыгуу зарыл.



47-сүрөт

8.7  $V$  көлөмүндөгү нурдануунун толук энергиясы  $E = \sigma VT^4$ ,

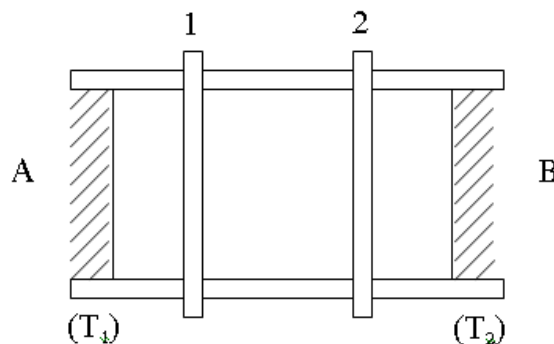
$$\text{ал эми эркин энергиясы} \quad F = -T \int \frac{EdT}{T^2} = -\frac{\sigma VT^4}{3},$$

$$\text{энтропиясы} \quad S = -\frac{\partial F}{\partial T} = \frac{4}{3} \sigma VT^3.$$

Адиабаттык процессте энтропия өзгөрбөйт, б.а  $VT^3 = const$ .

8.8 Бири-бири менен ички бети күзгү цилиндр аркылуу туташтырылган температуралары  $T_1$  жана  $T_2$  ( $T_1 > T_2$ ) болгон  $A$  жана  $B$  эки кара телону карайлы (48-сүрөт).

Цилиндрде беттерине күзгү капталган 1 жана 2 кыймылдуу поршендер бар. 1 поршенди  $A$  телосунун бетине тийгизип калтырып, 2-поршенди алып таштайлы. Анда цилиндрдин жалпы көлөмү  $B$  телосунун тең



48-сүрөт

салмактуу нурдануусуна толот. Эми 2-поршенди  $B$  телосуна тийгизип, жайгаштырып, биринчи поршенди цилиндрден сууруп алалы. Эгерде экинчи поршенди  $B$  телосунан  $A$  телосун көздөй жылдырсак цилиндрдеги нурдун бардыгы  $A$  телосу тарабынан жутулат, цилиндр кайрадан  $B$  телосунун нурдануусуна толот. 1-поршенди  $B$  нын жанына коюп, 2-поршенди сууруп алып 1-поршенди  $A$  телосун көздөй жылдырабыз. Кайрадан  $B$  нурданткан энергия  $A$  га жутулат.

Мына ушундай жол менен биз энергияны  $B$  телосунан алып  $A$  телосуна бере алабыз. Бул процедураны кайталоо менен каалаган сандагы энергияны муздак  $B$  телосунан ыссык  $A$  телосуна өткөрө алабыз. Термодинамиканын экинчи башталышына ылайык муну жумуш аткаруу аркылуу гана ишке ашырууга болот. Эгерде нурдануу поршенге басым жасайт деп эсептесек, анда аны жумуш аткаруу менен гана жылдырууга болот.

8.9 Газдын басымы  $P = nkT = \frac{N}{V}kT$ . Атомдор ядролорго жана электрондорго ажырашкан деп эсептеп  $\frac{N}{V}$  катышын тыгыздыкка оңой эле өткөрүүгө болот. Зат суутектен турган болсо, анда

$$\frac{N}{V} = \frac{2\rho}{m},$$

мында  $m$  – протондун массасы. Анда

$$P = \frac{2\rho}{m}kT.$$

Нурдануунун басымы  $P = \frac{u}{3} = \frac{\sigma T^4}{3} = \frac{8\pi^5 k^4 T^4}{45c^3 h^3}$ .

Басымдарды теңештирип, тыгыздыкты табабыз:

$$\frac{2\rho}{m}kT = \frac{8\pi^5 k^4 T^4}{45c^3 h^3}; \quad \rho = \frac{\pi^2 mk^3 T^3}{90(\hbar c)^3}.$$

8.10  $V$  көлөмүндөгү  $\nu$  дан  $\nu + d\nu$  га чейинки жыштыктарга ээ болушкан түрдүү поляризациядагы фотондордун саны

$$dN(\nu) = g(\nu)n(\nu)d\nu = \frac{V8\pi\nu^2 d\nu}{c^3 \left( e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1 \right)}.$$

Анда тең салмактуу нурдануунун  $1\text{см}^3$  көлөмүндөгү фотондордун толук саны

$$N = \int_0^\infty dN(\nu) = \frac{8\pi}{c^3} \int_0^\infty \frac{\nu^2 d\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} = \frac{k^3 T^3}{\pi^2 (\hbar c)^3} \int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1}$$

$$\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{e^x - 1} \approx 2.4 \text{ болгондуктан} \quad N = \frac{2.4}{\pi^2} \left( \frac{kT}{\hbar c} \right)^3.$$

Эсептөөлөрдү жүргүзсөк  $N \approx 2 \cdot 10^{10}$  келип чыгат.

8.11  $T = 6000 \text{ K}$ .

8.12  $P \approx 2,3 \cdot 10^{11} \text{ атм}$ .

8.13 Ферминин  $f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu_0}{kT}} + 1}$  функциясы

$E = \mu_0 + \delta$  кезинде  $f(\delta) = \frac{1}{e^{\frac{\delta}{kT}} + 1}$  жана

$E = \mu_0 - \delta$  кезинде  $f(-\delta) = \frac{1}{e^{-\frac{\delta}{kT}} + 1}$  маанилерин алат. Мындан

$$f(\delta) = \frac{1}{e^{\frac{\delta}{kT}} + 1} = \frac{e^{-\frac{\delta}{kT}}}{1 + e^{-\frac{\delta}{kT}}} = \frac{e^{-\frac{\delta}{kT}} + 1 - 1}{e^{-\frac{\delta}{kT}} + 1} = 1 - \frac{1}{e^{-\frac{\delta}{kT}} + 1} = 1 - f(-\delta).$$

8.14  $\delta = 2kT$  кезинде Ферминин функциясынын так мааниси

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu_0}{kT}} + 1} = \frac{1}{e^{\frac{2kT}{kT}} + 1} = \frac{1}{e^2 + 1} \approx 0.119,$$

ал эми жакындаштырылган мааниси

$$f(E) = e^{-\frac{E-\mu_0}{kT}} = e^{-2} \approx 0.135.$$

$\delta = 10 kT$  кезинде Ферминин функциясынын так мааниси

$$f(E) = \frac{1}{e^{10} + 1} \approx 0.000044,$$

жакындаштырылган мааниси

$$f(E) = e^{-10} \approx 0.000045.$$

8.15  $T$  температурасында энергиясы  $E$  болгон абалдын электрон тарабынан ээлишинин ыктымалдыгы Ферминин

$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1}$  функциясы аркылуу аныкталат.

Эгерде  $E - \mu = 0,1 \text{ эВ}$  болсо, анда  $\frac{E - \mu}{kT} = \frac{0,1}{0,025} = 4$ ,  $f(E) = \frac{1}{e^4 + 1} = 1,79 \cdot 10^{-2}$ .

Эгерде  $E - \mu = -0,1 \text{ эВ}$  болсо, анда  $\frac{E - \mu}{kT} = -4$ ,  $f(E) = \frac{1}{e^{-4} + 1} = 0,98$ .

8.16  $E = \mu$  кезинде Ферминин бөлүштүрүүсү

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1} = \frac{1}{1+1} = 0,5, \text{ б.а электрондун Ферминин деңгээлинде}$$

болушунун ыктымалдыгы  $0,5$  ке барабар.

8.17 Ферминин бөлүштүрүү функциясы

$$f(E) = \frac{1}{e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1} \quad \text{көрүнүшүнө} \quad \text{ээ,} \quad \text{ошондуктан}$$

$$\frac{df}{dE} = -\frac{1}{kT} \frac{e^{\frac{E-\mu}{kT}}}{\left(e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1\right)^2},$$

$$\text{мындан} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial E}\right) dE = -\frac{1}{kT} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{\frac{E-\mu}{kT}} dE}{\left(e^{\frac{E-\mu}{kT}} + 1\right)^2}.$$

$$\text{Белгилөөлөрдү жүргүзөлү:} \quad e^{\frac{E-\mu}{kT}} = x, \quad dx = e^{\frac{E-\mu}{kT}} \frac{dE}{kT}, \quad \text{анда}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial f}{\partial E}\right) dE = -\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x+1)^2} = \frac{1}{x+1} \Big|_0^{\infty} = -1.$$

$$8.18 \quad \text{Биринчи учурда} \quad \frac{1}{e^{\frac{\Delta E_1}{kT}} + 1} = 0,2, \quad \text{экинчисинде} \quad \frac{1}{e^{\frac{\Delta E_2}{kT}} + 1} = 0,8, \quad \text{мындан}$$

$$e^{\frac{\Delta E_1}{kT}} = 4 \quad \text{жана} \quad e^{\frac{\Delta E_2}{kT}} = \frac{1}{4}, \quad \text{б.а} \quad \ln 4 = \frac{\Delta E_1}{kT} \quad \text{жана} \quad \ln \frac{1}{4} = \frac{\Delta E_2}{kT}.$$

$$\text{Демек,} \quad \Delta E_1 = 1,38kT \quad \text{жана} \quad \Delta E_2 = -1,38kT$$

8.19 11,4 эсе азаят.

$$8.20 \quad E_{\max} = \frac{h^2}{2m} \left(\frac{3}{8\pi} n\right)^{\frac{2}{3}} \quad \text{формуласы аркылуу аныкталары белгилүү.}$$

$$E_{\max} \approx 9 \text{ эВ.}$$

8.21 Чоң термодинамикалык потенциал  $\Upsilon$  төмөнкүгө барабар:

$$\Upsilon = -kT \sum_i \ln \left(1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}}\right) = -kT \sum_i \ln \frac{1 + e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}}}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}}}.$$

Системанын энтропиясы

$$S = -\frac{\partial \Upsilon}{\partial T} = k \sum_i \ln \left(1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}}\right) - kT \sum_i \ln \frac{e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}} \frac{\mu - \varepsilon_i}{kT^2}}{1 + e^{\frac{\mu - \varepsilon_i}{kT}}} = k \sum_i \ln \frac{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} + 1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}}} + k \sum_i \ln \frac{-e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}}}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} + 1}.$$

$$\bar{n}_i = \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}} + 1} \quad \text{болгондуктан}$$

$$S = k \sum_i \ln \frac{1}{\bar{n}_i} + k \sum_i \frac{\ln \left(\frac{1}{\bar{n}_i} - 1\right)}{\frac{1}{\bar{n}_i}} =$$

$$-k \sum_i \ln(1 - \bar{n}_i) + k \sum_i \bar{n}_i \ln(1 - \bar{n}_i) - k \sum_i \bar{n}_i \ln \bar{n}_i = -k \sum_i [(1 - \bar{n}_i) \ln(1 - \bar{n}_i) + \bar{n}_i \ln \bar{n}_i]$$

$$\bar{n}_i \ll 1 \quad \text{кезинде} \quad S = -k \sum_i \bar{n}_i \ln \bar{n}_i.$$

8.22 Энергиясы  $E$  ден  $E + dE$  ге чейинки интервалда жаткан электрондордун саны

$$dn = \frac{4\pi(2m)^{3/2} E^{1/2} dE}{h^3}.$$

Бирдик көлөмдөгү электрондордун жалпы саны

$$n = \int_0^{E_{\max}} dn = \int_0^{E_{\max}} \frac{4\pi(2m)^{3/2} E^{1/2} dE}{h^3} = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} \cdot \frac{2}{3} E_{\max}^{3/2}.$$

$$\text{Мындан } E_{\max} = E_F = \mu_0 = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}.$$

Максималдык энергиянын чоңдугу Ферминин деңгээлинин ордун аныктайт.

8.23 Ферминин деңгээлинин мааниси  $E_F = \mu_0 = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}$  туюнтмасы аркылуу аныкталат, мында  $m$  - электрондун эффективдүү массасы,  $n$  - бирдик көлөмдөгү электрондордун саны.  $n = \frac{N_A}{M} \rho$  болорун эске

алып 
$$m^* = \frac{h}{2\mu_{0\text{экс}}} \left( \frac{3}{8\pi} \frac{N_A}{M} \rho \right)^{2/3}, \quad m^* = 11,5 \cdot 10^{-37} \text{ кг}.$$

8.24 Ферминин температурасы  $T_F = \frac{E_F}{k} = \frac{\mu_0}{k}$  барабардыгынан аныкталат, мында  $\mu_0$  - абсолюттук нөл температурасындагы Ферминин деңгээли:

$$\mu_0 = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3}{8\pi} n \right)^{2/3}. \quad \text{Анда } T_F = \frac{h^2}{2mk} \left( \frac{3}{8\pi} n \right)^{2/3}. \quad T_F = 3,5 \cdot 10^4 \text{ К}.$$

8.25 Термодинамикадан  $C_p - C_v = -T \frac{\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P^2}{\left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T}$  болору белгилүү. Бирок

$$\left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_P = - \left( \frac{\partial S}{\partial P} \right)_T \sim T, \quad \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \rightarrow const, \quad \text{ошондуктан}$$

$$C_p - C_v \sim T^3.$$

8.26 Энтропия  $S = \int \frac{C_v dT}{T}$ , мында  $C_v = \left( \frac{\partial E}{\partial T} \right)_V = \left( \frac{\partial U}{\partial T} \right)_V$  - электрондук газдын жылуулук сыйымдуулугу.  $E = \frac{3}{5} N \mu \left[ 1 + \frac{5\pi^2}{12} \left( \frac{kT}{\mu} \right)^2 \right]$  болорун эске

$$\text{алсак, анда } C_v = \frac{1}{2} \pi^2 \frac{k^2 N T}{\mu}, \quad S = \frac{1}{2} \pi^2 \frac{k^2 N T}{\mu}.$$

8.27  $\left( \frac{2\pi m k T}{h^2} \right)^{3/2} \frac{V}{N} \approx 1$  кубулуу критерийинен  $T_k \cong n^{2/3} \frac{h^2}{2\pi m k T}$ ,



мында  $n = \frac{N}{V} = \frac{N_A}{M} \rho$ ,  $N_A$  - Авагадро саны,  $\rho$  - тыгыздык,  $M$  - молдук масса. Чоңдуктардын маанилерин ордуна коюп  $T_k \sim 1\text{К}$  болорун көрөбүз. Мындан суутектин молекулалары кадимки температураларда классикалык статистикага баш ийишери келип чыгат.

8.28 Кубулуу критерийин пайдаланып биринчи учурда да, экинчи учурда да классикалык статистика туура болушу жөнүндө тыянак чыгарууга болот.

8.29 Кванттык статистиканын колдонулушунун

$$\frac{V}{N} \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2} \ll 1 \quad \text{шартынан} \quad n = \frac{N}{V} = \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2}. \quad \text{Эсептөөлөрдү}$$

$$\text{жүргүзүп} \quad n \approx 10^3 \text{ м}^{-3}. \quad n = \rho \frac{N_A}{M} \quad \text{туюнтмасынан} \quad \rho = \frac{nM}{N_A} \quad \text{же}$$

$$\rho = 3.3 \cdot 10^6 \text{ кг/м}^3.$$

$$\text{Басым} \quad P = \frac{2}{3} \frac{E}{V} = \frac{2}{3} \frac{N\bar{\varepsilon}}{V} = \frac{2}{3} n\bar{\varepsilon}, \quad \text{мында} \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon_{\max} \left[ 1 + \frac{5\pi}{12} \left( \frac{kT}{\varepsilon_{\max}} \right)^2 \right].$$

8.30 Кубулуу температурасы  $T_k \cong n^{2/3} \frac{h^2}{2\pi mk}$ , мындан  $n = \left( \frac{2\pi mkT}{h^2} \right)^{3/2}$ .

Сан маанилерин ордуна койсок, анда  $n \cong 1.2 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$ .

8.31  $T$  температурасында молекулалардын импульсунун орточо мааниси

$$\bar{p} \sim \sqrt{2m\bar{\varepsilon}} \sim \sqrt{mkT},$$

фазалык мейкиндиктин көлөмү  $\Delta\Gamma \sim V \bar{p}^3 \sim (mkT)^{3/2} V$ ,

$$\text{абалдардын саны} \quad \Omega = \frac{\Delta\Gamma}{h^3} \sim \frac{(mkT)^{3/2} V}{h^3}.$$

$\left( \frac{mkT}{h^3} \right)^{3/2} V \gg N$  барабардыгы кубулуунун жок болгондугунун шарты менен дал келет.

8.32 Кубулуу температурасынын  $T_k = n^{2/3} \frac{h^2}{2\pi mk}$  формуласын пайдаланабыз.

$$\text{Анда} \quad \frac{T_k(e)}{T_k(p)} = \frac{m_p}{m_e} \approx 1836.$$

## 9. Флуктуациялар теориясы

9.1  $\overline{\Delta g^2} = \overline{g^2} - \bar{g}^2$  болору белгилүү.

$$\overline{g^2} = 3 \frac{kT}{m} \quad \text{жана} \quad \bar{g} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{2kT}{m} \right)^{1/2} \quad \text{болгондуктан} \quad \overline{\Delta g^2} = \frac{kT}{m} \left( 3 - \frac{8}{\pi} \right).$$

9.2  $\bar{\varepsilon} = \frac{m}{2} \overline{g^2} = \frac{3}{2} kT$  жана  $\overline{\varepsilon^2} = \frac{m^2}{4} \overline{g^4} = \frac{15}{4} (kT)^2$ . Анда  $\overline{(\Delta\varepsilon)^2} = \overline{\varepsilon^2} - \bar{\varepsilon}^2 = \frac{3}{2} (kT)^2$ .

9.3 Энергиянын флуктуациясын аныктоо үчүн дисперсиянын чоңдугун эсептейли:

$$\overline{\Delta E^2} = \overline{E^2} - \bar{E}^2.$$

$\bar{E}^2$  жана  $\overline{E^2}$  ты абалдардын интегралы аркылуу туюнталы

$$\bar{E} = kT^2 \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)_V,$$

$$\overline{E^2} = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \left[ \int E e^{-\frac{E}{kT}} dZ \right] = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \left( kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right) + k^2 T^4 \left( \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right)^2.$$

$$C_V = \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} = \frac{\partial}{\partial T} \left( kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} \right) \text{ болгонун эске алсак, анда } \overline{\Delta E^2} = kT^2 C_V.$$

Энергиянын салыштырма флуктуациясы

$$\delta E = \frac{\sqrt{\overline{\Delta E^2}}}{\bar{E}} = \frac{T \sqrt{k C_V}}{\bar{E}}.$$

9.4 Энергиянын салыштырма флуктуациясы жалпы түрдө

$$\delta E = \frac{\sqrt{\overline{\Delta E^2} - \bar{E}^2}}{\bar{E}} = \frac{\sqrt{kT^2 C_V}}{\bar{E}}.$$

Катуу заттын төмөнкү температуралардагы энергиясы жана жылуулук сыйымдуулугу

$$E = \frac{3\pi^4 NkT^4}{5\theta^3}, \quad C_V = \frac{12\pi^4 NkT^3}{5\theta^3}.$$

Энергиянын салыштырма флуктуациясы төмөнкү температураларда

$$\delta E = \sqrt{\frac{20}{3\pi^4} \left( \frac{\theta}{T} \right)^3} \frac{1}{N} \text{ жана жогорку температураларда } \delta E = \frac{1}{\sqrt{N}}.$$

9.5 Энергиянын салыштырма флуктуациясы

$$\delta E = \frac{\sqrt{\overline{\Delta E^2}}}{\bar{E}}.$$

Каноникалык бөлүштүрүлгөн изотермалык системада

$$\overline{\Delta E^2} = kT^2 C_V.$$

Идеалдуу газ үчүн

$$\overline{\Delta E^2} = \frac{3}{2} kT^2 Nk = \frac{3}{2} Nk^2 T^2, \quad \bar{E} = \frac{3}{2} NkT.$$

Анда 
$$\delta E = \frac{\sqrt{\frac{3}{2} Nk^2 T^2}}{\frac{3}{2} NkT} = \sqrt{\frac{2}{3N}}.$$

9.6 Көлөмү  $V$  болгон катуу заттын энергиясы

$$\bar{E} = E_0 + \frac{3Vk^4 T^4}{2\pi^2 c^3 \hbar^3} \int_0^{\frac{\hbar\omega_{\max}}{kT}} \frac{x^3 dx}{e^x - 1},$$

$$\bar{E} = E_0 + \alpha T^4,$$

мындан 
$$\overline{\Delta E^2} = kT^2 \frac{\partial \bar{E}}{\partial T} \sim T^5.$$

9.7 
$$\overline{\Delta x^3} = \overline{(x - \bar{x})^3} = \overline{x^3} - 3\overline{x^2 \bar{x}} + 3\overline{x \bar{x}^2} + \bar{x}^3 = \overline{x^3} - \bar{x}^3 - 3\bar{x}(\overline{x^2} - \bar{x}^2) = \overline{x^3} - \bar{x}^3 - 3\bar{x}(\overline{\Delta x^2}).$$

9.8 Нормалаштырылган Гаусстун бөлүштүрүүсү

$f(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha \bar{x}^2}$  көрүнүшүнө ээ. Анда

$$\overline{x^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} x^2 e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\alpha^{3/2}} = \frac{1}{2\alpha},$$

$$\overline{x^4} = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} x^4 e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} \cdot \frac{3\pi^{1/2}}{4\alpha^{5/2}} = \frac{3}{4} \frac{1}{\alpha^2}.$$

Акыркы эки туюнтманы өз ара салыштырып

$$\overline{x^4} = 3(\overline{x^2})^2 \quad \text{деп жаза алабыз.}$$

9.9  $\overline{\Delta E^2} = kT^2 C_V$ , ал эми  $\frac{\sqrt{\overline{\Delta E^2}}}{\bar{E}} = \frac{T\sqrt{kC_V}}{\bar{E}}$  болору белгилүү. Анда

$$\frac{\sqrt{\overline{\Delta E^2}}}{\bar{E}} \approx \frac{T \sqrt{kNk \left(\frac{T}{T_F}\right)}}{NkT^2} = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\frac{T_F}{T}\right)^{1/2} \quad \text{же} \quad \frac{\sqrt{\overline{\Delta E^2}}}{\bar{E}} \approx 10^{-6}.$$

9.10 Көлөмдүн флуктуациясы жалпы учурда 
$$\overline{(\Delta V)^2} = \frac{kT}{\left[\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\right]}.$$

Идеалдуу газ үчүн 
$$P = \frac{NkT}{V}, \quad \left|\frac{\partial P}{\partial V}\right| = \frac{NkT}{V^2}.$$

Анда 
$$\overline{(\Delta V)^2} = \frac{kT}{NkT} V^2 = \frac{V^2}{N}.$$

9.11 Газдын тыгыздыгы 
$$\rho = \frac{m}{V}.$$

Анда 
$$\overline{(\Delta \rho)^2} = m^2 \left(\overline{\Delta \frac{1}{V}}\right)^2 = \frac{m^2}{V^4} \overline{(\Delta V)^2} = \frac{m^2}{V^2} \frac{kT}{V^2 \left[\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T\right]} = \frac{\rho^2}{V} kT\beta.$$

$V$  көлөмүндөгү тыгыздыктын салыштырма флуктуациясы

$$\overline{\left(\frac{\Delta\rho}{\rho}\right)^2} = \frac{kT\beta}{V}.$$

9.12 Газ термометриндеги температуранын флуктуациясы  $\frac{\Delta T}{T} = \frac{1}{\sqrt{N}}$ .

Эгерде термометрде  $10^{-3}$  моль өлчөмүндөгү газ болсо, анда  $N = 6 \cdot 10^{23} \cdot 10^{-3} = 6 \cdot 10^{20}$ . Газ термометри каттай ала тургандай температуранын минималдык өзгөрүүсү

$$\Delta T = \frac{T}{\sqrt{N}}, \quad \Delta T = \frac{T}{\sqrt{6 \cdot 10^{20}}} \approx 10^{-10} T.$$

9.13 Маятниктин узундугу  $l$ , массасы  $m$ , вертикалдан четтөө бурчу  $\varphi$  болсун дейли.  $A_{\min}$  жумушу болуп бул учурда маятник четтегенде оордук күчүнө каршы аткаруучу механикалык жумуш эсептелет. Четтөө бурчу анчалык чоң болбогон учурларда

$$A_{\min} = \frac{1}{2} mgl\varphi^2. \quad \text{Мындан} \quad \overline{\varphi^2} = \frac{kT}{mgl}.$$

9.14 Маятник тең салмактуулук абалынан кичине четтегенде анын энергиясы  $\Delta W = \frac{1}{2} mgl\varphi^2$  чоңдугуна өзгөрөт, мында  $\varphi$  – четтөө бурчу.

Энтропиянын азаюусу

$$\Delta S = -\frac{\Delta W}{T} = -\frac{mgl\varphi^2}{2T}.$$

9.15 Кичине термелүүлөр учурунда орточо кинетикалык энергия орточо потенциалдык энергияга барабар, б.а

$$\bar{E} = \frac{D\varphi^4}{2} = \frac{kT}{2},$$

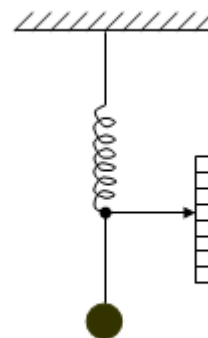
Мындан

$$k = \frac{D\varphi^4}{2} = 1,37 \cdot 10^{-16} \frac{\text{эрг}}{\text{К}}.$$

9.16 Азыркы өтө сезгич өлчөөчү приборлор ошол прибордогу молекулалардын кыймылы пайда кылган флуктуациялардын тартибиндеги кубулуштарды каттоого мүмкүндүк беришет. Эгерде  $F$  физикалык чоңдугунун күтүлүүчү мааниси орточо квадраттык флуктуациянын тартибинде же андан кичине болсо, б.а  $|F| < \delta_F$ , анда бир жолку өлчөө  $F$  тин мааниси чындыгында кандай экендигин айтууга мүмкүндүк бербейт. Бул учурда прибор өлчөнүүчү  $F$  чоңдугун эмес, жылуулук фонун каттайт. Өлчөгүч приборлордун сезгичтигинин табигый предели дегенди ушул мааниде айтабыз.

Көп жолку өлчөөлөрдүн эсебинен тактыкты кандайдыр бир даражада жогорулатууга жетишилет. Чындыгында эле, эгерде прибор механизмдеги өздүк хаотикалык жылуулук кыймылдарын

ана каттаган болсо, анда анын көрсөтүүлөрүнүн орточо мааниси нөлгө барабар болот. Эгерде бул жылуулук фонунан сырткы таасир кошулса, анда прибордун көрсөткүчү жаңы тең салмактуулук абалынын чекебелинде флуктуациялана баштайт, ошондуктан көрсөткүчтүн орточо абалы эми нөл болбойт. Бирок, мында да тез эле тактыкты жогорулатуунун предели байкалат, анткени тең салмактуулуктун бул эки абалы бири-биринен даана ажырап турушу зарыл. Бардык эле учурларда  $F$  чоңдугунун өлчөөгө мүмкүн болгон эң кичине маанилеринин тартиби флуктуация аркылуу аныкталат.



49-сүрөт

Мисал катары пружиналуу таразаны карап көрөлү (49-сүрөт). Сизгич таразанын көрсөткүчү (жебеси) пружинадагы молекулалардын жылуулук кыймылынын жана пружинаны курчаган абадагы басымдын флуктуациясынын таасири астында баш аламан термелет.

Алдыңкы маселенин чыгарылышына окшоштуруп

$$\frac{\beta \overline{\Delta x^2}}{2} = \frac{kT}{2} \quad \text{деп жазууга болот, мындан} \quad \sqrt{\overline{\Delta x^2}} = \sqrt{\frac{kT}{\beta}}.$$

Пружинанын  $\sqrt{\overline{\Delta x^2}}$  чоңдугуна созулушу жылуулук флуктуацияларынын эсебинен болушу мүмкүн. Анда серпилгичтүүлүк күчүнүн жумушу минималдык жылуулук энергиясына барабар болот:

$$\frac{1}{2} mg \sqrt{\overline{\Delta x^2}} = \frac{1}{2} kT, \quad \text{мындан} \quad m = \frac{kT}{g \sqrt{\overline{\Delta x^2}}} = \frac{kT}{g \sqrt{\frac{kT}{\beta}}} = \frac{\sqrt{\beta kT}}{g}.$$

Өлчөөнүн тактыгын жогорулатуу үчүн температураны төмөндөтүү зарыл.

9.17 Нерсеге  $\frac{m g^2}{2}$  кинетикалык энергиясын берүү үчүн анын үстүнөн

аткарылган жумуш  $\Delta A = E_{\text{кин}} = \frac{m g^2}{2}$ . Берилген

ылдамдыктын ыктымалдыгы  $dw \approx e^{-\frac{m g^2}{2kT}}$ . Кыймылдын орточо ылдамдыгы

$$\bar{g} = \frac{\int_0^{\infty} g e^{-\frac{m g^2}{2kT}} dg}{\int_0^{\infty} e^{-\frac{m g^2}{2kT}} dg} = \frac{\frac{1}{2} \frac{2kT}{m}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi 2kT}{m}}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}.$$

Экинчи жактан

$$E_{\text{кин}} = \Delta A = \frac{3}{2} kT.$$

Анда энтропиянын азаюусу

$$\Delta S = -\frac{\Delta A}{T} = -\frac{3}{2} k.$$

9.18 Кылдын узундугу  $l$ , керилүү күчү  $F$  болсун дейли. Кылдын учтарынын биринен  $x$  аралыгында жайгашкан чекитти карайлы, жана  $y$  ал чекиттин туурасына жылышы болсун. Анда кыл учтары бекитилген чекиттен  $x, y$  чекитине жүргүзүлгөн эки кесиндиден түзүлөт деп кароого болот. Кылды ушундай деформациялоо үчүн сарпталуучу жумуш

$$A_{\text{мин}} = F(\sqrt{x^2 + y^2} - x) + F[\sqrt{(l-x)^2 + y^2} - (l-x)] \approx \frac{Fy^2}{2} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{l-x} \right).$$

$$A_{\text{мин}} = \frac{kT}{2} \quad \text{болгондуктан} \quad \overline{y^2} = \frac{kT}{Fl} x(l-x).$$

9.19 Системанын көлөмүнүн  $\Delta V$  га флуктуацияланышынын ыктымалдыгы

$$dw = Ce^{-\frac{\Delta A}{kT}} dV,$$

мында  $\Delta A$  – көлөмдү  $\Delta V$  га өзгөртүү үчүн системанын үстүнөн аткарылган жумуш. Маселенин шартында  $\Delta A = P\Delta V + \Delta F$ , мында  $\Delta F$  – эркин энергиянын өзгөрүшү.  $\Delta F$  ти  $\Delta V$  нын даражалары боюнча катарга ажыратсак, анда

$$\Delta A = P\Delta V + \left( \frac{\partial F}{\partial V} \right)_T \Delta V + \left( \frac{\partial^2 F}{\partial V^2} \right)_T \frac{(\Delta V)^2}{2} + \dots = - \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \frac{(\Delta V)^2}{2}.$$

Көлөмдүн орточо квадраттык флуктуациясын табалы

$$\overline{\Delta V^2} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\Delta V)^2 e^{-\frac{\Delta A(V)}{kT}} dV}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\Delta A(V)}{kT}} dV} = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (\Delta V)^2 e^{\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T \frac{(\Delta V)^2}{2kT}} dV}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_V \frac{(\Delta V)^2}{2kT}} dV} = \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi(2kT)^3}{\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T}}}{\sqrt{\frac{\pi(2kT)}{\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T}}} = \frac{kT}{\left| \left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_V \right|}.$$

Бул теңдемеде  $\int_{-\infty}^{\infty} dw(V) = 1$  нормалаштыруу шартына ылайык

$\left( \frac{\partial P}{\partial V} \right)_T < 0$  болору эске алынды. Бул акыркы шарт системанын

туруктуулугунун шарты болот.

9.20 Системанын температурасынын  $\Delta T$  га флуктуацияланышынын ыктымалдыгы  $dw = c \cdot e^{-\frac{\Delta A}{kT}} dT$ . Бул учурда  $\Delta A = \Delta E - T\Delta S$ , мында

$\Delta E$  – системанын ички энергиясынын өзгөрүшү,  $\Delta S$  – энтропиянын өзгөрүшү.  $\Delta E$  ни  $\Delta S$  тин даражалары боюнча катарга ажыратып, төмөнкүнү алабыз:

$$\Delta A = \left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V \Delta S + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}\right)_V \frac{(\Delta S)^2}{2} + \dots - T\Delta S = T\Delta S + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}\right)_V \frac{(\Delta S)^2}{2} + \dots - T\Delta S = \left(\frac{\partial^2 E}{\partial S^2}\right)_V \frac{(\Delta S)^2}{2}.$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial S}\right)_V = T, \quad \Delta S = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \Delta T \quad \text{болорун эске алсак, анда}$$

$$\Delta A = \left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_V \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V^2 \frac{(\Delta T)^2}{2} = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V \frac{(\Delta T)^2}{2} = \frac{C_V}{T} \frac{(\Delta T)^2}{2}.$$

$\overline{\Delta T^2}$  ну алдыңкы маселеде  $\overline{\Delta V^2}$  ну тапкандай жол менен табабыз:

$$\overline{\Delta T^2} = \frac{kT^2}{C_V}.$$

9.21 Система басымдын  $\Delta P$  флуктуациясына ээ болушунун ыктымалдыгы  $dw = c \cdot e^{\frac{\Delta A}{kT}} dP$ . Бул учурда  $\Delta A = \Delta E + V\Delta P$ .  $\Delta E$  ни  $\Delta P$  нын даражасы боюнча катарга ажыратып, төмөнкүнү алабыз:

$$\Delta A = V\Delta P + \left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_S \Delta P + \left(\frac{\partial^2 E}{\partial P^2}\right)_S \frac{(\Delta P)^2}{2} + \dots$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial P}\right)_S = -V \quad \text{болгондуктан} \quad \Delta A = -\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S \frac{(\Delta P)^2}{2}.$$

Басымдын орточо квадраттык флуктуациясы  $\Delta P = \frac{kT}{\left|\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S\right|}.$

Нормалаштыруу шартынан  $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_S < 0$  болорун алабыз. Бул шарт системанын туруктуулугунун шарты болот.

9.22  $V$  жана  $T$  өзгөрүлмөлөрүндө  $\Delta E = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T \Delta V + \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \Delta T.$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P, \quad \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = C_V \quad \text{болгондуктан}$$

$$\Delta E = \left[ T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \right] \Delta V + C_V \Delta T.$$

Анда  $\Delta E^2 = \left[ T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \right]^2 \Delta V^2 + C_V^2 \Delta T^2$

$$\overline{\Delta V^2} = -kT\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T, \quad \overline{\Delta T^2} = \frac{kT^2}{C_V} \quad \text{болорун эске алып жана}$$

орточолоштуруп, төмөнкүнү алабыз:

$$\overline{\Delta E^2} = -\left[ T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - P \right]^2 kT\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T + C_V kT^2.$$

9.23 Флуктуациянын натыйжасында конденсатордун обкладкаларында  $q$  заряды пайда болушу мүмкүн. Анда конденсатордун энергиясы

$$E = \frac{q^2}{2C}.$$

Экинчи жактан бул энергия  $\frac{kT}{2}$  ге барабар. Мындан  $\overline{q^2} = CkT$  болору келип чыгат.

9.24 Алдыңкы маселенин чыгарылышына окшоштуруп

$$\frac{L\overline{\Delta I^2}}{2} = \frac{kT}{2} \quad \text{деп жаза алабыз. Мындан} \quad \overline{\Delta I^2} = \frac{kT}{L}.$$

9.25 Катоддон  $t$  убактысынын ичинде учуп чыккан бөлүкчөлөрдүн санынын флуктуациясы

$$\overline{n^2} - (\overline{n})^2 = \overline{n} = n_0 t.$$

Учуп чыккан бөлүкчөлөрдүн флуктуациясы токтуң  $j_0 = n_0 e$  тыгыздыгынын флуктуациясын пайда кылат:

$$\overline{\Delta j^2} = \frac{e^2 \overline{\Delta n^2}}{t^2} = \frac{e^2 \overline{n}}{t^2} = \frac{e j_0}{t},$$

мында  $e$  - элементардык электр заряды.

9.26 Диффузия учурунда  $\overline{\Delta x^2} = 2Dt$ , мында  $D = \frac{kT}{6\pi\eta r}$ .

$$\text{Мындан} \quad \Delta x = \sqrt{\frac{kTt}{3\pi\eta r}}.$$

9.27  $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ .

9.28 Найквисттин формуласын пайдаланып  $\frac{\overline{\varepsilon^2}}{R} = 4kT\Delta\nu$  болорун табабыз.

9.29  $\delta_n$  ди табуу үчүн  $\delta_n = \sqrt{kT \frac{\partial \overline{n}}{\partial \mu}}$  формуласын Больцмандын

$$\overline{n}_\alpha \approx e^{\frac{\mu - \varepsilon_\alpha}{kT}}, \quad \text{Бозенин} \quad \overline{n}_\alpha \approx \frac{1}{e^{\frac{\mu - \varepsilon_\alpha}{kT}} - 1} \quad \text{жана}$$

Ферминин  $\overline{n}_\alpha \approx \frac{1}{e^{\frac{\mu - \varepsilon_\alpha}{kT}} + 1}$  бөлүштүрүүлөрүнө колдонолу.

Анда тиешелүү түрдө:  $\frac{\partial \overline{n}}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} e^{\frac{\mu - \varepsilon_\alpha}{kT}} \cdot \frac{1}{kT} = \frac{\overline{n}}{kT},$

$$\frac{\partial \overline{n}}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_\alpha - \mu}{kT}} - 1} \right) = \frac{e^{\frac{\varepsilon_\alpha - \mu}{kT}} \cdot \frac{1}{kT}}{\left( e^{\frac{\varepsilon_\alpha - \mu}{kT}} - 1 \right)^2} = \frac{1}{kT} \frac{e^{\frac{\varepsilon_\alpha - \mu}{kT}}}{\left( e^{\frac{\varepsilon_\alpha - \mu}{kT}} - 1 + 1 \right)^2} = \frac{1}{kT} \left( \overline{n} + \overline{n}^2 \right) = \frac{\overline{n}}{kT} (1 + \overline{n})$$

жана



$$\frac{\partial \bar{n}}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{1}{e^{\frac{\varepsilon_a - \mu}{kT}} + 1} \right) = \frac{\bar{n}}{kT} (1 - \bar{n}).$$

Натыйжада

$$\begin{aligned} \delta_n &= \sqrt{\bar{n}}, \\ \delta_n &= \sqrt{\bar{n}(1 + \bar{n})}, \\ \delta_n &= \sqrt{\bar{n}(1 - \bar{n})}. \end{aligned}$$

9.30  $\overline{\Delta N^2} = kT \left( \frac{\partial N}{\partial \mu} \right)_{T,V}$  экендиги белгилүү.  $\frac{\partial N}{\partial \mu}$  ну эсептөөдө  $\mu$  нун

абсолюттук нөл температурасындагы маанисин пайдаланабыз:

$$\mu = (3\pi^2)^{2/3} \frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{N}{V} \right)^{2/3}.$$

Анда 
$$\frac{\partial N}{\partial \mu} = \frac{3}{2} \frac{2m}{N^2} \frac{V^{2/3} N^{1/3}}{(3\pi^2)^{2/3}} = \frac{3^{1/3} m}{\pi^3 \hbar^2} \left( \frac{N}{V} \right)^{1/3} V.$$

Ордуна койсок 
$$\overline{(\Delta N)^2} = \frac{3^{1/3} m kT}{\pi^3 \hbar^2} \left( \frac{N}{V} \right)^{1/3} V.$$

9.31  $V$  көлөмүндөгү бөлүкчөлөрдүн салыштырма флуктуациясы

$$\frac{\Delta n_V}{n_V} = \frac{\sqrt{\overline{\Delta n_V^2}}}{n_V} = \frac{1}{\sqrt{\bar{n}_V}},$$

мында  $\bar{n}_V$  -  $V$  көлөмүндөгү бөлүкчөлөрдүн орточо саны.

$\Delta V$  кичине көлөмү үчүн  $\bar{n}_V = \bar{\rho}(z) \Delta V$  деп алууга болот, мында

$$\bar{\rho}(z) = \rho_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}. \quad \text{Анда} \quad \frac{\Delta n_V}{n_V} = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \Delta V}} \sqrt{e^{\frac{mgz}{kT}}}.$$

9.32 Электромагниттик талаанын жыштыктын  $\Delta \omega$  интервалына туура келген энергиясы

$$\Delta E = \frac{V \hbar \omega^3 \Delta \omega}{\pi^2 c^3 (f - 1)}; \quad f = e^{\frac{\hbar \omega}{kT}}.$$

$\delta_E = \sqrt{kT^2 \frac{\partial \overline{E}}{\partial T}}$  формуласын колдонуп флуктуацияны табалы:

$$\delta_{\Delta E} = \sqrt{\frac{V \hbar^2 f \omega^4 \Delta \omega}{\pi^2 c^3 (f - 1)^2}}.$$

Бул туюнтманы өзгөртүп төмөнкүдөй көрүнүштө жазууга болот:

$$\delta_{\Delta E} = \sqrt{\hbar \omega \Delta E + \frac{(\Delta E)^2 \pi^2 c^3}{V \omega^2 \Delta \omega}}.$$

Жогорку жыштыктарда ( $\hbar \omega \gg kT$ ) тамырдын астындагы биринчи кошулуучуну гана калтырууга болот. Ага таза корпускулалык түшүндүрмө бере алабыз. Айталы  $\Delta n$  - жыштыктары  $\omega$  менен

$\omega + \Delta\omega$  нын арасындагы фотондордун орточо саны болсун. Анда  $\Delta E = \hbar\omega\Delta n$ ,

$$\delta_{\Delta E} = \hbar\omega\delta_{\Delta n} = \hbar\omega\sqrt{\Delta n}.$$

Бул алынган туюнтма  $\Delta n \ll 1$  болгон учур үчүн 9.29-маселесиндеги формулага дал келет.

Төмөнкү жыштыктарда тамырдын астындагы экинчи кошулуучу үстөмдүк кылат, ал эми биринчисин эске албай эле коюуга болот:

$$\delta_{\Delta E} \approx \sqrt{\frac{(\Delta E)^2 \pi^2 c^3}{V\omega^2 \Delta\omega}}.$$

Экинчи кошулуучу жарыктын табияты жөнүндөгү толкундук көз караштарга туура келет.

## 10. Тең салмаксыз процесстердин теориясынын айрым маселелери

10.1 Термодинамика өтө көп сандагы бөлүкчөлөрдөн турган системалардагы жалпы закон ченемдүүлүктөрдү, изилденүүчү объектердин спецификалык өзгөчөлүктөрүнө жана аларда жүрүүчү процесстердин механизмдерине карабастан, окуп үйрөтөт. Бул жагдай термодинамиканын жоболорун ар кандай системаларга, анын ичинде тирүү организмдерге да, эгерде бул системаларда термодинамиканын чектөөлөрү аткарылса, колдонууга мүмкүнчүлүк берет.

Тең салмактуу процесстерди караган классикалык термодинамика биологияда өтө жакындаштырылган түрдө гана колдонулушу мүмкүн, анткени тирүү организмдер тең салмактуу абалда болушпайт. Тең салмактуу термодинамиканы жашоо кубулуштарын анализдөө үчүн колдонууга жасалган көптөгөн аракеттердин ийгиликсиз аякташы мына ушуну менен түшүндүрүлөт.

Тирүү организм, термодинамикалык көз караш боюнча, ичинде түрдүү кайрылбас процесстер (химиялык реакциялар, диффузия ж.б) жүрүүчү ачык система болуп эсептелет. Ошондуктан биологиялык системаларга кайрылбас процесстердин термодинамикасынын жоболорун колдонуу бир топ жакшы натыйжаларга алып келет. 1946-жылы Пригожин жана Виам ачык системанын стационардуу абалындагы энтропияны эң аз өндүрүү принцибин тирүү организмдерге таркатышты. Алардын теориясы боюнча, организмдердин өнүгүү, өсүү жана картаюу мезгилинде энтропияны өндүрүүнүн салыштырма ылдамдыгы үзгүлтүксүз азайып, система акыркы стационардуу абалына жакындайт. Теориянын бул тыянагы физиологиядагы жетилген куракка

жакындаган сайын жаныбарлардын жана адамдын жылуулук өндүрүүсүнүн (негизги алмашуунун) ылдамдыгынын азайышы тууралуу маалыматтар менен ырасталып турат. Кайрылбас процесстердин термодинамикасын тирүү организмдерге колдонууга болорунун далили катары энтропиясы минималдык өсүүчү стационардуу абалдардын туруктуулугуна окшоп тирүү организмдердин да сырткы таасирлерге карата бизге белгилүү туруктуулугун айтууга болот. Акырында өнүгүү процессинде тирүү жандыктардын уюшулуу иреттүүлүгүнүн жалпысынан жогорулашы убакыттын өтүшү менен системанын энтропиясынын азайышын билдирет, бул жагдай тең салмаксыз термодинамикалык системанын стационардуу абалына жакындоо процессиндеги тартибине туура келет.

Кайрылбас процесстердин учурдагы термодинамикасын тирүү организмдердин жашоосун түшүндүрүүгө колдонуудагы белгилүү бир сандык чектөө катары анын тең салмактуулуктан анчалык алыстабаган системаларды изилдөөгө ылайыкташкан сызыктуулугун көрсөтүүгө болот. Ал эми тирүү организмдер тең салмактуу абалдарынан өтө алыс турушат жана аларда жүрүүчү процесстер да өтө кайрылбас болушат. Ошондой болсо да, Пригожиндин стационардуу абалда энтропиянын эң аз өндүрүлүшү жөнүндөгү принцибин ар кандай термодинамикалык системага жакшы жакындаштыруу катары колдонууга болот деп эсептөөгө болчудай.

10.2 Тартип бир нерсенин жайгашуусундагы туура түзүлүш, иреттүүлүк, ал эми «хаос» - иретсиздик, баш аламандык катары аныкталат. Ошондуктан кристаллды биз *бөлүкчөлөрдүн иреттелген*, ал эми суюктукту (жана газды) – тиешелүү түрдө *иретсиз системасы* деп айтабыз.

Бирок, температурасы төмөндөгөндө кристаллдын кубдук торчосу гексагоналдык торчого өтөрү белгилүү. Бул кристаллдык фазалардын кайсынысы (кубдук же гексагоналдык) көбүрөөк иреттелген? Ушуга байланыштуу *иреттелүүнүн* (тартиптин өзгөрүшүнүн) *чени* жөнүндө суроо туулат.

Мындай ченем болуп системанын симметриясынын бузулушу эсептелет. Жогоруда сөз болгон кристаллдын температура төмөндөгөн кездеги полиморфтук айлануусунда симметриянын жоголушу мүмкүн, анткени кубдук торчо кыйла жогорку симметрияга ээ. Ушуга окшош эле, суюктук муздаганда пайда болуучу кристалл да баштапкы суюктукка караганда азыраак симметриялуу (б. а. көбүрөөк иреттелген) система; Бенардын маселесиндеги конвекциялык агымдар пайда болгондон кийинки

суюктуктун симметриясы тынч абалдагы ошол эле суюктуктукуна караганда төмөн; айрым атомдорунун магниттик моменттеринин бардыгы бир багытка бурулган ферромагнетик бул моменттер баш аламан жайгашкан парамагнетикке караганда азыраак симметриялуу. Кыскасы, мейкиндиктик же мезгилдүү кайталануучу ар кандай структуранын пайда болуусу чөйрөнүн бир тектүүлүгүн, б. а. мейкиндиктеги же убакыттагы трансляцияларга карата симметрияны бузат.

Ошондуктан суюктуктун өтө тең салмаксыз абалында пайда болуучу жана татаал структуранын түзүлүшү (өз алдынча уюшулушу) менен мүнөздөлүүчү турбуленттик агымы ламинардык агымга салыштырганда көбүрөөк иреттелген (азыраак тартипсиз) болуп эсептелет.

Тартиптин жана анын өзгөрүшүнүн (иреттелишинин) чоңдугу системанын симметриясы менен байланышкан *тартиптин параметри* аркылуу мүнөздөлөт. Системанын симметриясы төмөнүрөөк абалы сырткы таасирлерге карата көбүрөөк туруктуу болушат.

10.3 Мүмкүн болгон бардык кванттык абалдарында боло алуучу кандайдыр бир туюк системаны элестеткен статистикалык ансамблди карайлы.  $n_i$ -аркылуу ансамблдин  $i$ - кванттык абалдагы мүчөлөрүнүн санын белгилейли.  $n_i$  сандарынын көптүгү системанын абалдары үчүн статистикалык бөлүштүрүү функциясын берет. Убакыттын өтүшү менен ансамблдин мүчөлөрүнүн абалдар боюнча бөлүштүрүлүшү өзгөрөт, анткени система бир кванттык абалдарынан башкаларына өтүп турат. Эгерде  $p_{ik}$ - бирдик убакыт ичинде  $i$  - абалдан  $k$ -абалга өтүүнүн ыктымалдыгы болсо, анда  $dt$  убактысынын ичиндеги мындай өтүүлөрдү жасаган ансамблдин мүчөлөрүнүн саны  $n_i p_{ik} dt$ .

Бул туюнтманы бардык акыркы абалдар боюнча суммалап чыксак, анда  $dt$  убактысынын ичинде  $i$  - абалдагы системалардын азайышын алабыз:

$$dn_i^- = \sum_k n_i p_{ik} dt.$$

Ошол эле убакта башка абалдардан  $i$  - абалга өтүүлөр да болуп турат. Бул, өз кезегинде,  $i$ - абалдагы ансамблдин мүчөлөрүнүн санынын көбөйүшүнө алып келет.

$$dn_i^+ = \sum_k p_{ki} n_k dt.$$

Биринен экинчисин кемитип, берилген кванттык абалдагы системалардын санынын өсүндүсүн алабыз:

$$dn_i = \sum_k (n_k p_{ki} - n_i p_{ik}) dt.$$

Деталдык тең салмактуулук принцибине ылайык  $p_{ki} = p_{ik}$  болорун эске алалы. Анда

$$\frac{dn_i}{dt} = \sum_k p_{ik} (n_k - n_i).$$

Тең салмактуу абалга абалдар үчүн ыктымалдыктардын убакыттан көз каранды болбогон бөлүштүрүүсү мүнөздүү. Эгерде  $\frac{dn_i}{dt} = 0$  болсо, анда  $n_i = n_k = const.$  Бул шарт микроканоникалык бөлүштүрүүгө туура келет.

10.4 Сырткы талаа бар учурда кинетикалык теңдеме төмөнкүдөй көрүнүштө болот.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + g_k \frac{\partial f}{\partial x_k} - \frac{1}{m} \frac{\partial U}{\partial x_k} \frac{\partial f}{\partial g_k} = \iint (\tilde{f}f' - ff') \mathcal{H} d\sigma(q, \bar{e}) d^3 g'.$$

Максвелл-Больцмандын

$$f = const \cdot e^{-\frac{m g^2}{2kT}} e^{-\frac{U(r)}{kT}}$$

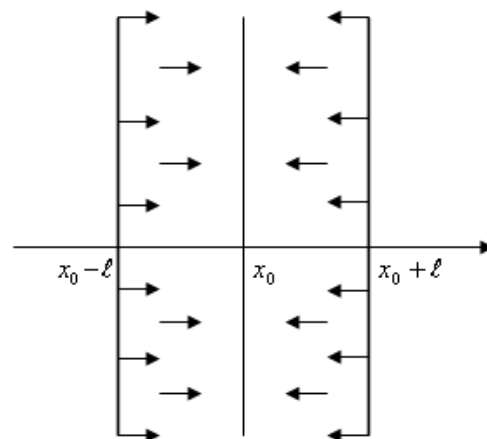
бөлүштүрүүсү кинетикалык теңдеменин сол тарабын нөлгө айландырат. Бул учурда кагылышуулардын интегралы да нөлгө барабарланат, анткени  $\tilde{f}f' = ff'$  катышы орун алат.

10.5 Ички сүрүлүү күчү Ньютондун закону аркылуу аныкталат:

$$F = -\eta S \frac{d g}{dx},$$

мында  $g$  - газдын  $Ox$  огуна перпендикуляр багытта жылуучу катмарынын агуу ылдамдыгы,  $S$  - катмарлардын беттешүү аянты,  $\eta$  - ички сүрүлүү коэффициенти.

Айталы  $x_0$  чекитинин сол жагында  $g(x_0 - l)$ , ал эми оң тарабында  $g(x_0 + l)$  макроскопиялык ылдамдыктарына ээ болушкан газдын катмарлары жайгашсын дейли (50-сүрөт). Газ агым түрүндө кыймылга



50-сүрөт

келгендиктен ар бир молекула баш аламан жылуулук кыймылынан ашыкча  $m g$  импульсуна ээ болот. Молекула катмардан катмарга өткөндө бул импульс газдын бир бөлүгүнөн башкасына берилет. Айталы, газдын тыгыздыгы  $\rho$  жана температура бардык жерде бирдей болсун.  $t$  убактысынын ичинде диффузиянын

натыйжасында газдын  $\frac{1}{6}\rho l S$  молекуласы  $x = x_0$  тегиздигин солдон онду көздөй жана ошончо эле молекула тескери багытта кесип өтүшөт. Мында  $t$  -эркин жол узактыгы (убакыты), катмарлардын калыңдыгы эркин жол узундугу  $l$  ге барабар алынат.

Бул учурда солдон оңго  $\frac{1}{6}\rho l S m \vartheta(x_0 - l)$  импульсу ташылат, ал эми карама-каршы багытта  $\frac{1}{6}\rho l S m \vartheta(x_0 + l)$  импульсу өтөт.

Жыйынтыгында, газдын  $x_0$  чекитинен оң тарапта жайгашкан катмары  $\frac{1}{6}\rho l S m [\vartheta(x_0 - l) - \vartheta(x_0 + l)] \approx -\frac{1}{3} m \rho l^2 S \left( \frac{d\vartheta}{dx} \right)_{x_0}$  импульсун алат.

Бул  $F = -\frac{1}{3} m \rho l^2 S \frac{d\vartheta}{dx} \frac{1}{t}$  күчүнүн аракетине эквивалентүү.

Демек,  $\eta = \frac{1}{3} m \rho \bar{\vartheta} l$ ,  $\left( \bar{\vartheta} = \frac{l}{t} \right)$ .

10.6  $\nu \approx 4,7 \cdot 10^9$ .

# ТИРКЕМЕЛЕР

## 1. Негизги физикалык турактуулар

- Жарыктын вакуумдагы ылдамдыгы -  $c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ м/с}$
- Авогадро саны -  $N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$
- Лошмидт саны -  $n_0 = 2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$
- Универсалдуу газ турактуусу -  $R = 8,314 \text{ Дж/К} \cdot \text{моль}$
- Больцман турактуусу -  $k = 1,380 \cdot 10^{-23} \text{ Дж/К}$
- Планк турактуусу -  $\begin{cases} h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \\ \hbar = \frac{h}{2\pi} = 1,054 \cdot 10^{-34} \text{ Дж} \cdot \text{с} \end{cases}$
- Элементардык заряд -  $e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ Кл}$
- Электрондун тынч абалындагы массасы -  $m_e = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$
- Протондун тынч абалдагы массасы -  $m_p = 1,672 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Нейтрондун тынч абалдагы массасы -  $m_n = 1,674 \cdot 10^{-27} \text{ кг}$
- Магниттик турактуулук -  $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Гн/м}$
- Электрдик турактуулук -  $\epsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ Ф/м}$
- Оордук күчүнүн ылдамдануусу -  $g = 9,807 \text{ м/с}^2$

## 2. Дирактын дельта-функциясы

$$\text{Дельта-функция } \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \text{ болгондо,} \\ \infty, & x = x_0 \text{ болгондо} \end{cases}$$

барабардыгы аркылуу аныкталат, жана, эгерде  $a < x_0 < b$  болсо, анда

$$\int_a^b \delta(x - x_0) dx = 1. \quad (\text{T2.1})$$

Эгерде  $f(x)$  - үзгүлтүксүз функция болсо, анда  $a < x_0 < b$  үчүн

$$\int_a^b f(x) \delta(x - x_0) dx = f(x_0). \quad (\text{T2.2})$$

### 3. Эйлердин гамма-функциясы

Гамма-функция

$$\Gamma(n) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx \quad (\text{T3.1})$$

интегралдык барабардыгы аркылуу аныкталат. Бөлүктөп интегралдап

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) \quad (\text{T3.2})$$

рекурренттик катышына ээ болобуз.

$n=1$  жана  $n = \frac{1}{2}$  болгон учурларда гамма-функция

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \sqrt{\pi} \quad (\text{T3.3})$$

маанилерин алат.

Бул формулалардын жардамында  $n$  дин бүтүн жана жарым-бүтүн (*полуцелый*) сан маанилери үчүн гамма-функциянын маанилерин жеңил эле аныктоого болот. Мисалы,

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{жана} \quad \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{(2n-1)!!}{2^n} \sqrt{\pi}, \quad (\text{T 3.4})$$

мында  $(2n-1)!!$  - 1 ден  $(2n-1)$ ге чейинки удаалаш так сандардын көбөйтүндүсү.

Аргументтин башка маанилериндеги  $\Gamma(n)$ ди атайын таблицалардан табууга болот.

### 4. Айрым интегралдарды эсептөө

Статистикалык физиканын маселелеринде көп учурда

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx \quad (\text{T 4.1})$$

жана

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx, \quad (\text{T 4.2})$$

(мында  $n$  - бүтүн сан) көрүнүшүндөгү интегралдарды эсептөөгө туура келет. Бул интегралдар, өзгөрүлмөлөрдү тиешелүү түрдө алмаштыруу аркылуу, бүтүн же жарым- бүтүн аргументтен гамма-функцияга (Т3.1) келтирилет:

$$\Gamma(y) = \int_0^{\infty} x^{y-1} e^{-x} dx$$

Аларды, өз кезегинде, (Т3.2)

$$\Gamma(y+1) = y\Gamma(y)$$

рекурренттик катнашынын жардамында



$$\Gamma(1) = 1 \quad \text{жана} \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

маанилери аркылуу туюнта алабыз. Мисалы, бүтүн аргумент үчүн гамма-функция

$$\Gamma(n) = (n-1)!$$

(Т4.1 – Т4.2) интегралдарын эсептөөнүн дагы эки жолун көрсөтөлү. Ал үчүн алгач

$$\int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha}, \quad (\text{T4.3})$$

$$\int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{2\alpha}, \quad (\text{T4.4})$$

жана

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \quad (\text{T4.5})$$

интегралдарын эсептеп алалы.

Биринчи эки (Т4.3–Т4.4) интегралдары, биринчисинде  $y = -\alpha x$ , экинчисинде  $y = -\alpha x^2$  деп өзгөрүлмөлөрдү алмаштыруу менен оңой эле эсептелет. Ал эми Пуассондун интегралы деп аталуучу (Т4.5) интегралынын мааниси төмөнкүдөй табылат.

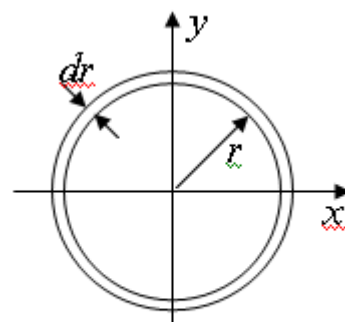
Интегралдоонун өзгөрүлмөлөрү катары  $x$  жана  $y$  ти пайдаланып Пуассондун интегралын эки жолу-

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx, \quad I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha y^2} dy$$

көрүнүшүндө жазып алалы жана бул туюнтмаларды өз ара көбөйтөлү:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha(x^2+y^2)} dx dy = \iint e^{-\alpha r^2} d\sigma, \quad (\text{T4.6})$$

мындагы кош интегралды декарттык координаталары  $x$  жана  $y$ , ал эми координата башталышынан  $d\sigma$  элементардык аянтчасына чейинки аралык  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  болгон тегиздик боюнча интеграл катары кароого болот. Интеграл астындагы функция  $r$  ден гана көз каранды болгондуктан  $d\sigma$  аянтчасы үчүн,  $dx dy$  тик бурчтугунун ордуна, борбору координата башталышында жаткан радиусу  $r$  жана калыңдыгы  $dr$  болгон чексиз жука шакекти алууга болот, анда  $d\sigma = 2\pi r dr$  (51-сүрөттү кара):



51-сүрөт

Анда (Т4.6) кош интегралы (Т4.4) тибиндеги бир эселүү интегралга айланат:

$$I^2 = 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-\alpha r^2} dr = \frac{\pi}{\alpha},$$

мындан (Т4.5) келип чыгат.

(Т4.1 – Т4.2) интегралдарын чыгаруунун жолдорунун бири - бөлүктөп интегралдоо аркылуу  $x$  тин даражасы  $n$  ди төмөндөтүп, аларды биз жогоруда талдаган (Т4.3 – Т4.5) интегралдарына өткөрүүгө негизделген.

Мисалы,

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = -\frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} x^n d e^{-\alpha x} = -\frac{1}{\alpha} \left\{ x^n e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} - n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-\alpha x} dx \right\} = \frac{n}{\alpha} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-\alpha x} dx,$$

жана

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x^2} dx = -\frac{1}{2\alpha} \int_0^{\infty} x^{n-1} d e^{-\alpha x^2} = -\frac{1}{2\alpha} \left\{ x^{n-1} e^{-\alpha x^2} \Big|_0^{\infty} - (n-1) \int_0^{\infty} x^{n-2} e^{-\alpha x^2} dx \right\} = \frac{n-1}{2\alpha} \int_0^{\infty} x^{n-2} e^{-\alpha x^2} dx,$$

анткени

$$x^n e^{-\alpha x} \Big|_0^{\infty} = 0 \quad \text{жана} \quad x^{n-1} e^{-\alpha x^2} \Big|_0^{\infty} = 0.$$

Бөлүктөп интегралдоону керектүү санда кайталап жүргүзүү менен (Т4.1) интегралын (Т4.3) интегралына келтиребиз:

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^n} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^n} \cdot \frac{1}{\alpha} = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}, \quad (\text{T4.7})$$

ал эми (Т4.2) интегралын  $n$  так ( $n = 2k + 1$ ) болгон учурда (Т4.4) интегралына

$$\int_0^{\infty} x^{2k+1} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(2k)!!}{(2\alpha)^k} \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(2k)!!}{(2\alpha)^{k+1}} = \frac{k!}{2\alpha^{k+1}}, \quad (\text{T4.8})$$

жана  $n$  жуп ( $n = 2k$ ) болгон учурда (Т4.5) интегралына келтирүүгө болот:

$$\int_0^{\infty} x^{2k} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{(2k-1)!!}{(2\alpha)^k} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi} (2k-1)!!}{2^{k+1} \alpha^{k+1/2}}, \quad (\text{T4.9})$$

мында  $(2k)!! = 2^k k!$ -ден  $2k$  га чейинки бардык жуп сандардын көбөйтүндүсү,  $(2k-1)!!$ -ден  $2k-1$  ге чейинки бардык так сандардын көбөйтүндүсү ( $k=0$  болгон учур үчүн  $(2k)!!$  жана  $(2k-1)!!$  дар бирге барабар деп алынат).

(Т4.1-Т4.2) интегралдарын эсептөөнүн башка бир жолу (Т4.3-Т4.5) интегралдарын  $\alpha$  параметри боюнча дифференциалдоого негизделген. Мисалы, (Т4.3) үчүн

$$\frac{d}{d\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = - \int_0^{\infty} x e^{-\alpha x} dx = \frac{d}{d\alpha} \left( \frac{1}{\alpha} \right) = -\frac{1}{\alpha^2},$$

$$\frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^{\infty} e^{-\alpha x} dx = \int_0^{\infty} x^2 e^{-\alpha x} dx = \frac{d^2}{d\alpha^2} \left( \frac{1}{\alpha} \right) = -\frac{2}{\alpha^3}$$

ж.б.д.у.с.

(Т4.4) барабардыгын  $\alpha$  боюнча дифференциалдап каалаган так  $n$  дер үчүн (Т4.2) тибиндеги интегралдардын маанилерин, ал эми (Т4.5)ти дифференциалдаганда – каалаган жуп  $n$  дер үчүн алардын маанилерин алууга болот.

(Т4.2) тибиндеги интегралдар  $-\infty$  ден  $\infty$  чейинки интервалдарда так  $n$  дер үчүн нөлгө айланат, ал эми жуп  $n$  дер үчүн 0 дөн  $\infty$  ге чейинки тиешелүү интегралдардын маанилеринен эки эсе чоң болушат, анткени биринчи учурда интеграл астындагы функция так, ал эми экинчи учурда –жуп болот.

Айрым учурларда (Т4.1-Т4.2) тибиндеги интегралдарды 0 дөн  $a$  га чейин,  $a$  дан  $\infty$  ге чейин же  $a$  дан  $b$  га чейин ( $a$  жана  $b$ -чектүү сандар) эсептөөгө туура келет. Бул учурларда аларды, интеграл астында (Т4.3-Т4.5) көрүнүшүндөгү функциялар алынганга чейин, бөлүктөп интегралдоо жолу менен  $x$  тин даражасы  $n$  ди төмөндөтүү зарыл, андан кийин (Т4.3-Т4.4) тибиндеги интегралдар түз эле эсептелет, анын натыйжасы элементардык функциялар аркылуу туюнтулат, ал эми (Т4.5) тибиндеги интегралды, интегралдоонун пределдерине жараша, Пуассондун интегралынын жана

$$\Phi(a) = \text{erf}(a) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^a e^{-x^2} dx$$

каталардын (Т6.1) интегралынын комбинациясы түрүндө жазууга болот. Каталардын интегралынын маанилери таблицалардан табылат же сандык методдордун жардамында компьютерде эсептелет.

## 5. Кванттык статистиканын формулаларында кездешүүчү интегралдар

Кванттык статистиканын формулаларында

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1} dx}{e^x + 1} \quad \text{жана} \quad I_2 = \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1} dx}{e^x - 1} \quad (\text{T5.1})$$

(мында  $x = \frac{\varepsilon - \mu}{kT}$ ) көрүнүшүндөгү интегралдар көп учурайт.

Бул интегралдар  $\frac{1}{e^x \pm 1}$  функциясын катарга ажыратуу жолу менен эсептелет. Ал үчүн бул функция  $\frac{1}{e^x \pm 1} = \frac{e^{-x}}{1 \pm e^{-x}}$  көрүнүшүнө өзгөртүлүп түзүлөт да  $\frac{1}{1 \pm e^{-x}}$  тин мааниси

$$\frac{1}{1-y} = \sum_{n=0}^{\infty} y^n \quad (T5.2)$$

жана  $\frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n$  . (T5.3)

суммалары түрүндө табылат. Натыйжада

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1} dx}{e^x + 1} = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-nx} dx = (1 - 2^{1-z}) \Gamma(z) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} = (1 - 2^{1-z}) \Gamma(z) \xi(z), \quad (T5.4)$$

мында  $\Gamma(z) = \int_0^{\infty} x^{z-1} e^{-x} dx$  - гамма-функция, ал эми

$$\xi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^z} \quad - \text{Римандын дзета-функциясы.}$$

$z = 1$  болгондо  $I_1 = \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1} dx}{e^x + 1}$  аныксыздыкка айланат,

анткени  $\int_0^{\infty} \frac{dx}{e^x + 1} = \ln 2$ .

Ошондой эле жол менен

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1} dx}{e^x - 1} = \Gamma(z) \xi(z), \quad (T5.5)$$

мында  $z > 1$ .

Бүтүн жуп  $z$  ( $z = 2n$ ) үчүн  $\xi$  - функциясы Бернуллинин сандары деп аталуучу  $B_n$  дер аркылуу туюнтулат, анда

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1} dx}{e^x + 1} = \frac{2^{2n-1} - 1}{2n} \pi^{2n} B_n, \quad (T5.6)$$

$$I_2 = \int_0^{\infty} \frac{x^{2n-1} dx}{e^x - 1} = \frac{(2\pi)^{2n}}{4n} B_n. \quad (T5.7)$$

Бернуллинин сандарынын жана  $\xi$  - функциянын бир нече алгачкы маанилерин келтирели:

$$B_1 = \frac{1}{6}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_4 = \frac{1}{30}; \quad (T5.8)$$

$$\xi\left(\frac{3}{2}\right) = 2,612, \quad \xi\left(\frac{5}{2}\right) = 1,341, \quad \xi(2) = \frac{\pi^2}{6},$$

$$\xi(3) = 1,202, \quad \xi(5) = 1,037 \quad (T5.9)$$

## 6. Каталардын интегралы

Каталардын интегралы

$$\Phi(z) = \operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx \quad (\text{T6.1})$$

барабардыгы аркылуу аныкталат. Бул аныктоону пайдаланып

$$\int_{\pm z}^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} [1 \mp \Phi(z)],$$

$$\int_{\pm z}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4} \pm \left[ \frac{z}{2} e^{-z^2} - \frac{\sqrt{\pi}}{4} \Phi(z) \right] \quad (\text{T6.2})$$

катнаштары орун аларын далилдөөгө болот.

$z \ll 1$  болгон учурларда

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left( z - \frac{z^3}{3 \cdot 1!} + \frac{z^5}{5 \cdot 2!} - \dots \right), \quad (\text{T6.3})$$

ал эми  $z=1$  үчүн  $\Phi(1) \approx 0,84$ .

Төмөнкү таблицادا  $0 \leq z \leq 3$  маанилери үчүн эсептелген  $\Phi(z)$  тин маанилери келтирилди.

### Каталардын интегралынын таблицасы

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-x^2} dx, \quad 0 \leq z \leq 3$$

<b>z</b>	<b>Φ(z)</b>	<b>z</b>	<b>Φ(z)</b>	<b>z</b>	<b>Φ(z)</b>
0,00	0,0000	0,55	0,5633	1,10	0,8802
0,01	0,0113	0,56	0,5716	1,11	0,8835
0,02	0,0226	0,57	0,5798	1,12	0,8868
0,03	0,0338	0,58	0,5879	1,13	0,8900
0,04	0,0451	0,59	0,5959	1,14	0,8931
0,05	0,0564	0,60	0,6039	1,15	0,8961
0,06	0,0676	0,61	0,6117	1,16	0,8991
0,07	0,0789	0,62	0,6194	1,17	0,9020
0,08	0,0901	0,63	0,6270	1,18	0,9048
0,09	0,1013	0,64	0,6346	1,19	0,9076
0,10	0,1125	0,65	0,6420	1,20	0,9103
0,11	0,1236	0,66	0,6494	1,21	0,9130
0,12	0,1348	0,67	0,6566	1,22	0,9155
0,13	0,1459	0,68	0,6633	1,23	0,9181
0,14	0,1569	0,69	0,6708	1,24	0,9205
0,15	0,1680	0,70	0,6778	1,25	0,9229
0,16	0,1790	0,71	0,6847	1,26	0,9252
0,17	0,1900	0,72	0,6914	1,27	0,9275

0,18	0,2009	0,73	0,6981	1,28	0,9297
0,19	0,2118	0,74	0,7047	1,29	0,9319
0,20	0,2227	0,75	0,7112	1,30	0,9340
0,21	0,2335	0,76	0,7175	1,31	0,9361
0,22	0,2443	0,77	0,7238	1,32	0,9381
0,23	0,2550	0,78	0,7300	1,33	0,9400
0,24	0,2657	0,79	0,7361	1,34	0,9419
0,25	0,2763	0,80	0,7421	1,35	0,9438
0,26	0,2869	0,81	0,7480	1,36	0,9456
0,27	0,2974	0,82	0,7538	1,37	0,9473
0,28	0,3079	0,83	0,7595	1,38	0,9490
0,29	0,3183	0,84	0,7651	1,39	0,9507
0,30	0,3286	0,85	0,7707	1,40	0,9523
0,31	0,3389	0,86	0,7761	1,41	0,9539
0,32	0,3491	0,87	0,7814	1,42	0,9554
0,33	0,3593	0,88	0,7867	1,43	0,9569
0,34	0,3694	0,89	0,7918	1,44	0,9583
0,35	0,3794	0,90	0,7969	1,45	0,9597
0,36	0,3893	0,91	0,8019	1,46	0,9611
0,37	0,3992	0,92	0,8068	1,47	0,9624
0,38	0,4090	0,93	0,8116	1,48	0,9637
0,39	0,4187	0,94	0,8163	1,49	0,9649
0,40	0,4284	0,95	0,8209	1,50	0,9661
0,41	0,4380	0,96	0,8254	1,60	0,9763
0,42	0,4475	0,97	0,8299	1,70	0,9838
0,43	0,4569	0,98	0,8342	1,80	0,9891
0,44	0,4662	0,99	0,8385	1,90	0,9928
0,45	0,4755	1,00	0,8427	2,00	0,9953
0,46	0,4847	1,01	0,8468	2,10	0,9970
0,47	0,4937	1,02	0,8508	2,20	0,9981
0,48	0,5027	1,03	0,8548	2,30	0,9989
0,49	0,5117	1,04	0,8586	2,40	0,9993
0,50	0,5205	1,05	0,8624	2,50	0,9996
0,51	0,5292	1,06	0,8661	2,60	0,9998
0,52	0,5379	1,07	0,8698	2,70	0,9999
0,53	0,5465	1,08	0,8733	2,80	0,9999
0,54	0,5549	1,09	0,8768	3,00	0,99998

## 7. Стирлингдин формуласы

Стирлингдин формуласы  $N$  дин чоң маанилеринде  $N!$  үчүн жакындаштырылган туюнтманы берет.

$N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot N$  барабардыгын логарифмалайлы:

$$\ln N! = \ln(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot N) = \ln 1 + \ln 2 + \ln 3 + \dots + \ln N = \sum_{k=1}^N \ln k \quad (\text{T7.1})$$

$k$  ны бирге салыштырганда жетишээрлик чоң ( $k \gg 1$ ) деп эсептеп, алынган сумманы интегралга алмаштырууга болот:

$$\ln N! = \sum_{k=1}^N \ln k \approx \int_1^N \ln k dk.$$

Акыркы интегралды бөлүктөп интегралдоо менен

$$\ln N! \approx \int_1^N \ln k dk = k \ln k \Big|_1^N - \int_1^N dk \approx N(\ln N - 1) \quad (\text{T7.2})$$

ге ээ болобуз.  $1 = \ln e$  болорун эске алып Стирлингдин формуласын

$$\ln N! \approx N(\ln N - \ln e) = N \ln \frac{N}{e} \quad (\text{T7.3})$$

түрүндө жазууга болот, мындан

$$N! = \left(\frac{N}{e}\right)^N. \quad (\text{T7.4})$$

$N$  анчалык чоң болбогон учурларда Стирлингдин тагыраак көрүнүштөгү

$$N! = \sqrt{2\pi N} \left(\frac{N}{e}\right)^N \quad (\text{T7.5})$$

формуласынан пайдалануу максатка ылайыктуу.

## 8. $e^x$ жана $e^{-x}$ функцияларынын маанилери

$x$	$e^x$	$e^{-x}$	$x$	$e^x$	$e^{-x}$
0,00	1,000	1,0000	2,10	8,166	0,1225
0,01	1,010	0,9900	2,15	8,585	0,1165
0,05	1,051	0,9512	2,20	9,025	0,1108
0,10	1,105	0,9048	2,25	9,488	0,1054
0,15	1,162	0,8607	2,30	9,974	0,1003
0,20	1,221	0,8187	2,35	10,49	0,0954
0,25	1,284	0,7788	2,40	11,02	0,0907
0,30	1,350	0,7408	2,45	11,59	0,0863
0,35	1,419	0,7047	2,50	12,18	0,0821
0,40	1,492	0,6703	2,55	12,81	0,0781
0,45	1,568	0,6376	2,60	13,46	0,0743
0,50	1,649	0,6053	2,65	14,15	0,0706

0,55	1,733	0,5769	2,70	14,88	0,0672
0,60	1,822	0,5488	2,75	15,64	0,0639
0,65	1,915	0,5220	2,80	16,44	0,0608
0,70	2,014	0,4966	2,85	17,29	0,0578
0,75	2,117	0,4724	2,90	18,17	0,0550
0,80	2,225	0,4493	2,95	19,11	0,0523
0,85	2,340	0,4274	3,00	20,09	0,0498
0,90	2,460	0,4066	3,10	22,20	0,0450
0,95	2,586	0,3867	3,20	24,53	0,0408
1,00	2,718	0,3679	3,30	27,11	0,0369
1,05	2,858	0,3499	3,40	29,96	0,0334
1,10	3,004	0,3329	3,50	33,11	0,0302
1,15	3,158	0,3166	3,60	36,60	0,0273
1,20	3,320	0,3012	3,70	40,45	0,0247
1,25	3,490	0,2865	3,80	44,70	0,0224
1,30	3,669	0,2725	3,90	49,40	0,0202
1,35	3,857	0,2502	4,00	54,60	0,0183
1,40	4,055	0,2466	4,20	66,69	0,0150
1,45	4,263	0,2346	4,40	81,45	0,0123
1,50	4,482	0,2231	4,60	99,48	0,0100
1,55	4,711	0,2122	4,80	121,5	0,0082
1,60	4,953	0,2019	5,00	148,4	0,0067
1,65	5,207	0,1920	5,20	181,3	0,0055
1,70	5,474	0,1827	5,40	221,4	0,0045
1,75	5,755	0,1738	5,60	270,4	0,0037
1,80	6,050	0,1653	5,80	330,3	0,0030
1,85	6,360	0,1572	6,00	403,4	0,0025
1,90	6,686	0,1496	7,00	1097	0,0009
1,95	7,029	0,1423	8,00	2981	0,0003
2,00	7,389	0,1353	9,00	8103	0,0001
2,05	7,768	0,1287	10,00	22026	0,00005



## АДАБИЯТТАР

1. Айзеншиц Р. Статистическая теория необратимых процессов. -М.: ИЛ, 1963. -127 с.
2. Базаров И.П. Термодинамика. -М.: Высшая школа,1991. -376 с.
3. Бахарева И.Ф. Нелинейная неравновесная термодинамика. - Изд-во Саратовского ун-та,1976. -141 с.
4. Био М. Вариационные принципы в теории теплообмена. -М.: Энергия,1975. – 209 с.
5. Гиббс Дж.В. Основные принципы статистической механики. -М.-Л.: ОГИЗ -Гостехиздат,1946. – 204 с.
6. де Гроот С.Р. Термодинамика необратимых процессов. -М.: ГИТТЛ,1956. – 281 с.
7. Гуров К.П. Феноменологическая термодинамика необратимых процессов (Физические основы). -М.: Наука,1978. -128 с.
8. де Донде Т., ван Риссельберг П. Термодинамическая теория сродства (книга принципов). -М.: Металлургия,1984. -134 с.
9. Дьярмати И. Неравновесная термодинамика. -М.: Мир,1974. –304 с.
10. Журавлев В.А. Термодинамика необратимых процессов (в задачах и решениях). - Ижевск: РХД,1998. -150 с.
11. Карно С. Размышления о движущей силе огня. Париж: 1824.
12. Киттель Ч. Статистическая термодинамика. -М.: Наука,1977. - 336 с.
13. Коткин Г.Л. Лекции по статистической физике. -Ижевск: РХД, 2003. -176 с.
14. Кубо Р. Статистическая механика. -М.: Мир,1967. – 452 с.
15. Кубо Р. Термодинамика. - М.: Мир,1970. – 304 с.
16. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика. Т.5: Статистическая физика, часть 1. - М.: Наука, 1976. – 584 с.
17. Ландау Л.Д. Собрание трудов. т.1. «Наука»,1969. – 199 с.
18. Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Т.9: Статистическая физика, часть 2. -М.: Наука,1978. – 449 с.
19. Леонтович М.А. Введение в термодинамику. Статистическая физика. - М.: Наука,1983. – 416 с.
20. Лоренц Г.А. Лекции по термодинамике. - Ижевск: РХД, 2001. -172 с.
21. Лоренц Г.А. Статистические теории в термодинамике. -Ижевск: РХД, 2001. -185 с.
22. Московский С.Б. Курс статитической физики и термодинамики. -М.: Академический проект: Фонд «Мир», 2005. -320 с.

23. Осипов А.И. Термодинамика вчера, сегодня, завтра. Часть 2. Неравновесная термодинамика. Соросовский образовательный журнал, №5, 1999. с.91-97.
24. Пригожин И. Введение в термодинамику необратимых процессов. -Ижевск: РХД, 2001. -160 с.
25. Пригожин И., Дефэй Р. Химическая термодинамика. - Новосибирск: Наука, 1966. -502 с.
26. Пригожин И. Конец определенности. Время, хаос и новые законы природы. -Ижевск: РХД, 2000. -207 с.
27. Пригожин И.Р. От существующего к возникающему. -М.: Наука, 1985. -327 с.
28. Путилов К.А. Термодинамика. -М.: Наука, 1971. -376 с.
29. Румер Ю.Б., Рывкин М.Ш. Термодинамика, статистическая физика и кинетика. -М.: Наука, 1971. -400 с.
30. Рюэль Д. Термодинамический формализм. -М.: Ижевск, ИКИ, 2002. -288 с.
31. Садовский М.В. Лекции по статистической физике. -Ижевск: РХД, 2003. -336 с.
32. Синай Я.Г. Теория фазовых переходов. -Ижевск: РХД, 2002. -208 с.
33. Стратонович Р.Л. Нелинейная неравновесная термодинамика. -М.: Наука, 1985. - 480 с.
34. Уленбек Дж., Форд Дж. Лекции по статистической механике. -М.: Мир, 1965. -307 с.
35. Фейнман Р. Статистическая механика. -М.: Мир, 1978. -408 с.
36. Ферми Э. Термодинамика. -Ижевск: РХД, 1998. -164 с.
37. Хакен Г., Хакен-Крелль М. Тайны восприятия. -М.-Ижевск: ИКИ, 2002. -272 с.
38. Хакен Г. Тайны природы. Синергетика: учение о взаимодействии. -М.-Ижевск: ИКИ, 2003. -320 с.
39. Хуанг К. Статистическая механика. -М.: Мир, 1966. -521 с.
40. Циглер Г. Экстремальные принципы термодинамики необратимых процессов и механика сплошной среды. -М.: Мир, 1966. -136 с.
41. Шелепин Л.А. Вдали от равновесия. -М.: Знание, 1987. -64 с.
42. Шредингер Э. Статистическая термодинамика. -Ижевск: РХД, 1999. – 95 с.
43. Эгембердиев Ж. Статистикалык физикага киришүү. -Ош: ОшМУ, «Билим», 2005. – 220 б.
44. Эйген М. Самоорганизация материи и эволюция биологических макромолекул. «Мир», 1973.

Басууга берилди: 17.12.2007.

Формат: 60x84 1Y16  
Буйрутма: №39

Көлөмү: 10 б.т.  
Нускасы: 200 даана.

---

**ОшМУ, "Билим" редакциялык-басма бөлүмү**  
Ош шаары, Ленин к., 331, каб.135., тел.: 7.20.61

